Hier gibt es einige Beispielaufgaben, wie sie auch in der Klausur vorkommen könnten. Dies soll lediglich dazu dienen, einen Überblick über mögliche Aufgabentypen zu geben. Aus der Anzahl der Aufgaben dieses Blattes und deren Schwierigkeit sollte man keinen Rückschluss auf die Klausur machen.

Sofern nicht anders angegeben ist jeder Beweis-/Rechenschritt sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

- ☐ Das Produkt einer stetigen und einer unstetigen Funktion reellen Funktion ist unstetig.
- ☐ Der beliebige Schnitt von kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.
- ☐ Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. dann ist $\sup A \in A$.
- ☐ Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f(A)$ offen in $\mathbb{R}$ ist für jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^2$.
- ☐ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.
- ☐ Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $x \in \mathbb{R}$, so daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x konvergiert. Dann gilt: $\exists \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |x_n - x| \geq \epsilon$.
- ☐ Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und es gelte $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- ☐ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $a > 0$. Dann gibt es $x_0 \in [-a, a]$ mit $f(x_0) = \sup\{f(x) \,|\, x \in [-a, a]\}$.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß der endliche Schnitt von offenen Teilmengen von X wieder offen ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie:
Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge reeller Zahlen, so divergiert auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Zeigen Sie, daß die Gleichung $\sqrt{\sin^2(x) + x^2} = 1$ mindestens **zwei** Lösungen im Intervall $[-\pi, \pi]$ besitzt.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x|x| + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf Differenzierbarkeit in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.