Tutorien am 25. / 26. 6.

Aufgabe 1:

(i) Es seien (f_n) und (g_n) gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, daß auch $(f_n + g_n)$ gleichmäßig konvergiert.

(ii) Zeige, daß i.a. $(f_n g_n)$ nicht gleichmäßig konvergiert. Betrachte hierzu $f_n, g_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := x, \quad g_n(x) := 1/n.$$

Aufgabe 2:
Es seien f_n, $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \frac{1}{1 + nx}, \quad g_n(x) := \frac{x}{1 + nx}.$$

Untersuche beide Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3:
Es sei $f \in B([a, b])$ und $g : X \to [a, b]$. Zeige, daß gilt:

$$\|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Für welche g gilt Gleichheit?

Aufgabe 4:
Zeige, daß cos eine gerade und sin eine ungerade Funktion ist und daß für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

gilt und mache Dir klar, daß sich hieraus leicht die üblichen Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen ableiten lassen, wie z.B.

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

und

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Man erinnere sich an die Nullstellen von cos und sin und zeige, daß

$$\tan : \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \tan(x) := \sin(x)/\cos(x)$$

wohldefiniert ist, skizziere tan und zeige das Additionstheorem des tan:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$