

## Tutorien am 14. / 15. 5.

### Aufgabe 1:

Untersuche die folgenden reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz und gib im Konvergenzfall ein  $N(\epsilon)$  an.

- (i)  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,
- (ii)  $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ ,
- (iii)  $x_n = n^2 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

### Aufgabe 2:

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_n) \subset X$  eine Folge in  $X$ . Beweise oder widerlege folgende Behauptungen.

- (i)  $(x_n)$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn in jeder  $\epsilon$ -Kugel  $B(x, \epsilon)$  unendlich viele Folgenglieder liegen.
- (ii)  $(x_n)$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn in jeder  $\epsilon$ -Kugel  $B(x, \epsilon)$  alle bis auf endlich viele (*fast alle*) Folgenglieder liegen.
- (iii)  $(x_n)$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn es eine  $\epsilon$ -Kugel  $B(x, \epsilon)$  gibt, in der alle Folgenglieder liegen.

### Aufgabe 3:

Es sei  $X = \mathbb{R}$  und  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  die triviale Metrik (siehe letztes Tutorium). Zeige, daß die Folge  $(\frac{1}{n})_n$  bezüglich  $d$  nicht konvergiert. Zeige weiterhin, daß nur die Folgen bezüglich  $d$  konvergieren, die ab einem bestimmten Index konstant sind.

### Aufgabe 4:

Sei  $a > 0$  beliebig. Zeige, daß die reelle Zahlenfolge

$$x_n := \frac{a^n}{n!}$$

konvergiert und bestimme dann den Grenzwert.

Hinweis: Zeige zunächst, daß die Folge ab einem bestimmten Index monoton ist und beschränkt.