Tutorien am 27. / 28. 5.

Aufgabe 1:

(i) Es seien $(X, d), (X', d'), (X'', d'')$ metrische Räume und $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ stetige Funktionen. Zeige, daß auch $g \circ f : X \to X''$ stetig ist, daß also die Komposition stetiger Funktionen stetig ist.

(ii) Zeige, daß alle Polynome[1] auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

(iii) Zeige, daß alle rationalen Funktion[2] auf ihrem Definitionsbereich stetig sind.

(iv) Es seien $f,\ g : \mathbb{R} \supset (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf allen rationalen Punkten übereinstimmen. Zeige, daß dann $f = g$ gilt.

(v) Die Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ist f auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig?

Aufgabe 2:
Berechne den Grenzwert $\lim_{x \to 1}(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}) \cdot \frac{1}{x-1}$.

Aufgabe 3:
Zeige, daß das Intervall $(0, 1)$ nicht kompakt in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4:
Es sei $f : \mathbb{R} \supset (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > 0$. Zeige, dass es dann $\delta > 0$ gibt, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Man mache sich klar, daß ganz analog auch gezeigt werden kann, daß die folgende Verallgemeinerung gilt:
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$ offen. Es sei weiterhin $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in U$ mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$.

[1] Ein Polynom ist eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, wobei $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

[2] Eine rationale Funktion r ist eine Abbildung $x \mapsto r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind. Wie ist der natürliche Definitionsbereich von r?