Tutorien am 4. / 5. 6.

Erinnerung:

> Sind (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \to X'$, so heißt f Lipschitz-stetig, falls es ein $L \geq 0$ gibt mit
>
> $$d'(f(x), f(y)) \leq L d(x, y), \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Aufgabe 1:
Zeige, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig und jede gleichmäßige stetig Funktion stetig ist, und daß jedoch im allgemeinen die Umkehrungen nicht gelten.

Aufgabe 2:

(i) In der VL wurde gezeigt, daß $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ nicht gleichmäßig stetig ist. Wie sieht es mit $g : (1/42, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$ aus?

(ii) Ist

$$f : [-2, 3] \times [1, 4] \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) := \left(\frac{x^2}{y^2 + 1}, \sin(3x - y), x^3 e^{2-x-y}\right)$$

gleichmäßig stetig?

(iii) Zeige, daß jede Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Auch gleichmäßig stetig?

(iv) Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$, gleichmäßig stetig oder Lipschitz-stetig? Hinweis: Für $x \geq y \geq 0$ gilt $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$.

Aufgabe 3:

(i) Ist $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ kompakt?

(ii) Es sei $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine „monoton fallende“ Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige, daß dann auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

kompakt ist.