Tutorien am 11. / 12. 6.

Aufgabe 1:

(i) Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einer Menge X. Zeige, daß dann durch

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

eine Metrik auf X definiert wird (die dann von $\|\cdot\|$ *induzierte Metrik* heißt).

(ii) Zeige, daß die triviale Metrik auf keinem nichttrivialen Vektorraum von einer Norm induziert wird.

Aufgabe 2:
Es seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalente Normen auf einer Menge X, d.h. es gibt Konstanten $c, C > 0$ mit

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|, \quad x \in X.$$

Zeige, daß die folgenden Aussagen gelten:

(i) Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert genau dann bezüglich $\|\cdot\|$, wenn sie bezüglich $|||\cdot|||$ konvergiert.

(ii) Es sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer normierter Raum und $f : X \to Y$. Dann ist f genau dann bezüglich $\|\cdot\|$ stetig, wenn f bezüglich $|||\cdot|||$ stetig ist.

Aufgabe 3:
Beweise die folgende eindimensionale Version des Brouwerschen Fixpunktsatzes:[1]

> Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion, so gibt es mindestens einen Fixpunkt $x_0 \in [a, b]$, also $f(x_0) = x_0$.

Rückseite!

[1] Die allgemeinere Version des Brouwerschen Abbildungssatzes sagt aus, daß jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^n$ in sich mindestens einen Fixpunkt besitzt. Diese Version ist aber deutlich schwerer zu beweisen.

Aufgabe 4:
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+(-1)^{2n-1}}{3n+1}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$