Tutorien am 17. / 18. 6.

Aufgabe 1:
Zeige $e^0 = 1$ und daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{und} \quad e^x > 0$$

gilt.

Aufgabe 2:
Bestimme die Menge

$$\{w \in \mathbb{C} \mid e^{w+z} = e^z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\}.$$

Aufgabe 3:
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{n!}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n^n}$

Aufgabe 4:
Die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cosinus hyperbolicus) und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeige, daß cosh eine gerade und sinh eine ungerade Funktion ist und skizziere den Graphen.

(ii) Zeige die folgenden Beziehungen:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

Bemerkung: Entsprechend gilt $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

Aufgabe 5:
Es sei

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Zeige, daß zwar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren, aber ihr Cauchyprodukt nicht. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch absolut?