Reihen

①

Sind $(a_n), (b_n) \subset X$, so daß

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren, so konvergieren

auch $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

~~Han~~ Cauchyprodukt von Reihen:

Für endliche Summen:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) = (a_1+a_2+\ldots+a_N)(b_1+b_2+\ldots+b_N)$$

$$= a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1 + \ldots + a_Nb_N$$

$$= (a_1b_1) + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Satz: Es seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, so daß

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv.)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =: A \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n =: B \in X$

(c) $c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis:

(1) Wir setzen
$$\left.\begin{aligned} A_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n, \\ B_N &= \sum_{n=1}^{N} b_n, \\ C_N &= \sum_{n=1}^{N} c_n, \\ \beta_N &= B_N - B \end{aligned}\right\} N \in \mathbb{N}.$$

Dann ist für $N \in \mathbb{N}$:
$$C_N = \sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$$
$$= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \ldots + (a_1 b_N + a_2 b_{N-1} + \ldots + a_N b_1)$$
$$= a_1 B_N + a_2 B_{N-1} + \ldots + a_N B_1$$
$$= a_1 (B + \beta_N) + a_2 (B + \beta_{N-1}) + \ldots + a_N (B + \beta_1)$$
$$= A_N B + a_1 \beta_N + a_2 \beta_{N-1} + \ldots + a_N \beta_1 .$$

Wir setzen $\gamma_N = a_1 \beta_N + a_2 \beta_{N-1} + \ldots + a_N \beta_1$.

(2) Zu zeigen ist $C_n \to AB$. Da $A_N B \to AB$ konv., reicht es zu zeigen: $\boxed{\gamma_n \to 0.}$

Wir schreiben $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ($\sum a_n$ konv. abs.).

(3) Es gilt $\beta_N = B_N - B \to 0$, da
$$B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Da $\beta_n \to 0$ gibt es $N_0 \geq 0$:

$$|\beta_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

Für $n \geq N_0$ folgt dann

$$0 \leq |\gamma_n| = |\beta_1 a_n + \beta_2 a_{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} a_2 + \beta_n a_1|$$

$$\leq |\beta_1 a_n + \ldots + \beta_{N_0} a_{n-N_0+1}| + \underbrace{|\beta_{N_0+1} a_{n-N_0} + \ldots + \beta_n a_1|}_{\leq \underbrace{|\beta_{N_0+1}|}_{\leq \varepsilon}|a_{n-N_0}| + \ldots + \underbrace{|\beta_n|}_{\leq \varepsilon}|a_1| \;\leq\; \varepsilon(|a_{n-N_0}| + \ldots + |a_1|) \;<\; \varepsilon \cdot \alpha}$$

$$\leq \underbrace{|\beta_1||a_n|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \ldots + |\beta_{N_0}|\underbrace{|a_{n-N_0+1}|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \varepsilon\alpha.$$

Also folgt $\quad 0 \leq \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha \quad \forall \varepsilon > 0,$

also $\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0$, also $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ▭

Potenzreihen

$(a_n) \subset \mathbb{K}$, $z_0 \in \mathbb{K}$ (Entwicklungspunkt)

Potenzreihen: $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , z \in \mathbb{K}.$$

Falls die Reihe konvergiert bezeichnen wir
$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ,$$
$f : D \to \mathbb{K}$, wobei
$$D = \{ z \in \mathbb{K} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ konvergiert} \}.$$

Konvergenzkreis:

Für jede Potenzreihe gibt es genau ein ~~...~~ $\rho \geq 0$ ($\rho = \infty$ möglich) : (Konvergenzradius)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konv. auf $B(z_0, \rho)$
div. auf $\mathbb{K} \setminus \overline{B}(z_0, \rho)$

[Bem: Auf $\partial B(z_0, \rho)$ kann alles passieren.]

VL: $$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Lemma: Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert, dann ist $$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

<u>Bemerkung</u>: Hier ist auch „Konvergenz gegen $+\infty$" erlaubt; Man sagt eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ „$\underbrace{\text{divergiert bestimmt}}_{= \text{„Konvergenz gegen } +\infty\text{"}}$ gegen $+\infty$", falls

$$\forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad x_n \geq K \quad \forall n \geq N.$$

<u>Beweis</u>: Sei $\alpha := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in \mathbb{R} \quad (= +\infty)$

(1) Dann gilt für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| < \alpha$:

$$\left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n (z-z_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|z-z_0|}{\alpha} < 1,$$

also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ nach dem Quotientenkriterium.

(2) Analog folgt für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| > \alpha$:

$$\left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n (z-z_0)^n} \right| \longrightarrow \frac{|z-z_0|}{\alpha} > 1,$$ also

div. die Potenzreihe hier.

(3) Damit folgt $~~\ldots~~$ $\rho = \alpha$. ∎

<u>Beispiel</u>: $a_n = \frac{1}{n!}$ $\quad z_0 = 0$.

Dann $e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Konvergenzradius:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = n+1 \longrightarrow \text{„}+\infty\text{"}, \text{ also}$$

$\varrho = +\infty$.

Also konvergiert die Potenzreihe überall in $\mathbb{K}$ und somit ist exp auf ganz $\mathbb{K}$ definiert!

Wesentl. Eigenschaft: Funktionalgleichung:

Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

<u>Beweis</u>: Seien $x, y \in \mathbb{K}$ bel. Dann ist

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{a_n}, \quad e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^n}{n!}}_{b_n}, \text{ also}$$

mit dem Cauchyprodukt:

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}$$

□

- Hieraus folgt z.B. für $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, denn

$$e^x \cdot e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1.$$

- $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

Ist $x \geq 0$, so folgt die Beh. sofort aus $e^x = 1 + \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^3}{6}}_{\geq 0} + \dots$

Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$, also $e^{-x} > 0$, also

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0.$$

- Für $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Insbesondere also

$$\cos(-x) = \cos(x)$$ „cos ist eine gerade Fkt."

und $\sin(-x) = -\sin(x)$ „sin ist eine ungerade Fkt."

und damit folgt aus

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x:$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$!

z.B. für cos:

$$e^{ix} + e^{-ix} = \cos x + i \sin x + \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)} + \underbrace{i \sin(-x)}_{= -i \sin x} = 2 \cos x.$$

~~Wenn~~ Bem.: Wenn wir ableiten können werden wir beweisen, daß alle Potenzreihen innerhalb des Konvergenzkreis differenzierbar sind, (also insb. auch stetig.)

Bsp.: Jedes Polynom ist eine Potenzreihe:

Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Wir setzen $x_0 = 0$ und $a_k = 0$ für $k > n$.

Dann $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Konvergenzradius ist ∞.