

1. ÜBUNG ZUR VORLESUNG
„ANALYSIS III“
IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 1. Betrachte eine Pyramide als den Raum unter einer geeigneten Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und berechne für ein Beispiel das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda$. Interpretiere dieses als Volumen der Pyramide.

Tutoriumsaufgabe 2. Führe den Beweis von Satz A3.18 aus, zeige also die Translationsinvarianz

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \tau_\nu) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda.$$

Tutoriumsaufgabe 3. Zeige, dass das Integral in Definition A3.12 tatsächlich wohldefiniert ist, dass also in

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda := \int_Q f d\lambda$$

die rechte Seite nicht von der Wahl des Quaders Q abhängt.

Tutoriumsaufgabe 4. Sei $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass

$$(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} fg d\lambda$$

linear und stetig ist.

Tutoriumsaufgabe 5. Beweise Lemma A4.5.

Hausaufgabe 1. Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, & x_1^2+x_2^2 \leq 1, \\ 0, & x_1^2+x_2^2 \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ und berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda$. Was ist die geometrische Bedeutung dieses Integrals?

Hausaufgabe 2. Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{U} \subset V^\circ$ und V beschränkt. Zeige, dass es ein $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq f \leq 1$, $\text{supp } f \subset V$ und $f|_U \equiv 1$ gibt.

Hausaufgabe 3. Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $s > 0$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(sx) d\lambda(x) = s^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda(x).$$

Übungsaufgabe 1. Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ und berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda$. Was ist die geometrische Bedeutung dieses Integrals?

Bemerkung. Man will die Rechnung nicht wirklich ausführen.