

6. ÜBUNG ZUR VORLESUNG
„ANALYSIS III“
IM SOMMERSEMESTER 2009

Ein kurzer Übungszettel für eine kurze Vorlesungswoche. Die Aufgaben sind mit dem Stoff bis einschließlich Satz A8.26 zu lösen.

Tutoriumsaufgabe 22. Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge und $B \subset \mathbb{R}^\ell$ eine beliebige Menge. Zeige, dass $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+\ell}$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung. Das ginge leichter, wenn wir den Satz von Fubini nicht bisher nur für halbstetige Funktionen hätten. Diskutiere das.

Hausaufgabe 17. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $m > n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Zeige, dass $f[U]$ eine Nullmenge ist.

Hausaufgabe 18. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $n \geq 1$. Die Menge der kritischen Werte von f ist

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \text{Es existiert } x \in f^{-1}[\{y\}] \text{ mit } \det D_x f = 0\}.$$

Zeige, dass diese Menge eine Nullmenge ist.

Tipp. Verallgemeinere Satz I.G2.7 mit Hilfe der Methoden aus dem Beweis von Satz A8.26 und der ihm voran gehenden Diskussion.