Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel

Sommersemester 2009

8. Mai 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

4. Übungsblatt

Abgabe am 20. Mai 2009 **vor** der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 4.1 **6 Punkte**

Bei der Diskretisierung der zweiten Ableitung einer Funktion (etwa zur Lösung eines Randwertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen) tritt die folgende tridiagonale Matrix auf:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Zeigen Sie: A ist positiv definit.

(b) Spezialisieren Sie den Algorithmus für die Cholesky-Zerlegung auf den Fall einer symmetrisch positiv definiten, tridiagonalen Matrix, deren Werte in zwei Vektoren $d \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ gespeichert sind.Diese beiden Vektoren sollen am Ende die Diagonale bzw. Nebendiagonale der Cholesky-Zerlegung enthalten. Geben Sie eine Beschreibung der Input- und Output-Parameter des Algorithmus an.

(c) Geben Sie die Cholesky-Zerlegung von A explizit an.

Aufgabe 4.2 **6 Punkte**

1. Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrische und positiv definite Matrizen. Sind dann auch die folgenden Matrizen symmetrisch und positiv definit?

$$-A, \qquad A+B, \qquad A^T+B, \qquad A-B, \qquad A^4+3A^2+16I, \qquad A^2-B, \qquad A^{-1}, \qquad A^{-1}+B^{-2}.$$

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

2. Sind die folgenden symmetrischen Matrizen positiv definit?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 17 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 9 & 17 & 43 \\ 24 & 43 & 110 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.3 **4 Punkte**

Es seien folgende Messwerte $(x_i; y_i; z_i)$ gegeben:

$$(1;1;3), \quad (1;3;1), \quad (3;1;3), \quad (3;3;3)$$

Formulieren Sie ein lineareas Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Ausgleichsebene

$$z = a + bx + cy$$

mit der Methode der kleinsten Quadrate. Lösen Sie das Problem mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Programmieraufgabe 4 **12 Punkte**

Schreiben Sie ein Programm `qrzerlegung`, das die QR–Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ ($n \geq m$), $\mathrm{Rang}(A) = m$ mit Hilfe von Householdermatrizen berechnet: $A = QR$, mit $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $R \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $Q = \prod_{i=1}^{m} H(w^{(i)})$ mit $H(w) = I - 2ww^T$, wobei $\|w^{(i)}\|_2 = 1$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Der Aufruf soll mit

```
[Q,R] = qrzerlegung(A)
```

erfolgen.

Schreiben Sie ein Programm `ausgleich`, das mit Hilfe des Programms `qrzerlegung` das Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 = \min$ für $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^n$, ($n \geq m$) löst:

```
x=ausgleich(A,b)
```

- Testen Sie Ihre Programme mit Aufgabe 4.3.
- Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung des bestapproximierenden Polynoms nullten, ersten, zweiten, bzw. dritten Grades für $N = 10, 100, 1000$ bezüglich der Norm

  $$\sum_{i=0}^{N} |f(x_i) - p(x_i)|^2 \quad \text{mit} \quad x_i = \frac{i}{N} \cdot \pi, \quad i = 0, \ldots, N$$

  für die Funktionen

  $$f(x) = \sin(x), \quad \text{und} \quad f(x) = e^x.$$

  auf. Berechnen Sie mit Hilfe des Programms `ausgleich` das Polynom. Stellen Sie das Ergebnis und den Approximationsfehler geeignet dar.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.