Lösungsskizze zum 7. Übungsblatt

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U, V \subseteq X$ Unterräume. Zeige: Ist U abgeschlossen und V endlichdimensional, so ist $W := U + V$ ein abgeschlossener Unterraum von X.
Hinweis: Induktion über die Dimension von V.

Beweis:
Offensichtlich ist W ein Unterraum, zeige also noch die Abgeschlossenheit von W.
Da $\dim V = n < \infty$, gibt es eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V. Untersuche nun die folgenden rekursiv definierten Unterräume auf Abgeschlossenheit:

$$W_0 := U, \quad W_i := W_{i-1} + \operatorname{span}\{v_i\} \quad \text{für } i = 1, \ldots n.$$

Nach Voraussetzung ist W_0 abgeschlossen.
Sei nun W_{i-1} abgeschlossen. Ist $v_i \in W_{i-1}$, so ist $W_i = W_{i-1}$ bereits abgeschlossen.
Sei also $v_i \in X \setminus W_{i-1}$, dann ist

$$W_i = \{s + \lambda v_i \mid s \in W_{i-1},\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige nun für eine Folge $(w_n)_n \subseteq W_i$ mit $w_n \xrightarrow{n\to\infty} w$, dass $w \in W_i$. Da $w_n \in W_i$, ist

$$w_n = s_n + \lambda_n v_i \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Da W_{i-1} abgeschlossen ist und $v_i \in X \setminus W_{i-1}$, gilt nach dem Satz von Hahn-Banach:

$$\exists\, \varphi \in X' : \quad \varphi\big|_{W_{i-1}} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(v_i) = d(v_i, W_{i-1}) > 0.$$

Setzt man nun $\Phi(v) = \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_i)}$, so gilt

$$\Phi \in X', \quad \Phi\big|_{W_{i-1}} = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(v_i) = 1.$$

Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von Φ

$$\lambda_n = \underbrace{\Phi(s_n)}_{=0} + \lambda_n \underbrace{\Phi(v_i)}_{=1} = \Phi(w_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(w) =: \lambda \in \mathbb{R}$$

und wegen der Abgeschlossenheit von W_{i-1}, $(s_n)_n \subseteq W_{i-1}$

$$s_n = w_n - \lambda_n v_i \xrightarrow{n\to\infty} w - \lambda v_i =: s \in W_{i-1}.$$

Folglich ist $w = s + \lambda v_i \in W_{i-1} + \operatorname{span}\{v_i\} = W_i$ und somit ist W_i abgeschlossen.
Also erhalten wir insbesondere die Abgeschlossenheit von $W = W_n$. $\square$