Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe
Sei $1 \leq p < \infty$ und $K \subseteq \ell^p$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) K ist $\|\cdot\|_p$-relativ kompakt.

(ii) K ist beschränkt und

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p = 0$$

gleichmäßig für alle $(x_i)_i \in K$.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$ (ii)
Da K relativ kompakt ist, ist $\overline{K}$ kompakt, also insbesondere beschränkt. Folglich ist auch $K \subseteq \overline{K}$ beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Zeige nun noch, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \text{ und } \forall\, (x_i)_i \in K.$$

Da K relativ kompakt ist und in dem vollständigen Raum $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ liegt, ist K auch präkompakt (totalbeschränkt) und folglich gilt:

$$\exists\, (z_i^{(1)})_i, \dots, (z_i^{(m)})_i \in \ell^p: \quad K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon((z_i^{(j)})_i).$$

Sei nun $(x_i)_i \in K$ beliebig. Dann existiert also ein $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass

$$\|(x_i)_i - (z_i^{(j)})_i\|_p^p < \varepsilon.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p &= \|(x_i)_i - (x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)\|_p^p \\
&\leq \|(x_i)_i - (z_i^{(j)})_i\|_p^p + \|(z_i^{(j)})_i - (z_1^{(j)}, \dots, z_{n-1}^{(j)}, 0, \dots)\|_p^p \\
&\quad + \|(z_1^{(j)}, \dots, z_{n-1}^{(j)}, 0, \dots) - (x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)\|_p^p \\
&< \varepsilon + \sum_{i=n}^{\infty} |z_i^{(j)}|^p + \sum_{i=n}^{\infty} |z_i^{(j)} - x_i|^p. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nun ist zum einen

$$\sum_{i=n}^{\infty} |z_i^{(j)} - x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i^{(j)} - x_i|^p = \|(z_i^{(j)})_i - (x_i)_i\|_p^p < \varepsilon$$

und zum anderen wegen $(z_i^{(j)})_i \in \ell^p$:

$$\sum_{i=n}^{\infty} |z_i^{(j)}|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i^{(j)}|^p = \|(z_i^{(j)})_i\|_p^p < \infty.$$

Daher existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $N_j \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{i=n}^{\infty} |z_i^{(j)}|^p < \varepsilon$ für alle $n \geq N_j$. Wähle nun $N = \max\{N_j \mid j \in \{1, \ldots, m\}\}$, dann gilt:

$$\sum_{i=n}^{\infty} |z_i^{(j)}|^p < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \text{ und } \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Eingesetzt in (1) folgt

$$\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p < 3\varepsilon^p \quad \forall\, n \geq N.$$

Da dieses N nur von ε (und nicht von $(x_i)_i$) abhängt, folgt die gleichmässige Konvergenz

$$\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \forall\, (x_i)_i \in K.$$

(ii)$\Rightarrow$ (i)
Wir wollen nun zeigen, dass K $\|\cdot\|_p$-relativ kompakt ist, d.h. dass jede Folge aus K eine (in ℓ^p, nicht notwendigerweise in K!) konvergente Teilfolge besitzt.
Sei also $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus K, gliedweise Darstellung:

$$\begin{array}{rcl} (x_i^{(1)})_i & = & (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots) \in K \\ (x_i^{(2)})_i & = & (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots) \in K \\ & \vdots & \\ (x_i^{(r)})_i & = & (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, \ldots) \in K \\ & \vdots & \end{array}$$

Betrachte nun die vertikalen Zahlenfolgen $(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ usw. und wende auf diese das Diagonalfolgenprinzip an:
Da $(x_i^{(n)})_i \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und K beschränkt ist, gilt $\|(x_i^{(n)})_i\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}|^p < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere $|x_i^{(n)}| < \infty$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Da somit auch die Zahlenfolgen $(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ usw. beschränkt sind, können wir den Satz von Bolzano-Weierstraß auf sie anwenden.
Wir erhalten also sukzessive:
$(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. es existiert ein $z_1 \in \mathbb{K}$ und eine Indexmenge $M_1 = \{n_k^{(1)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{\left(n_k^{(1)}\right)} = z_1.$$

Betrachte nun $(x_2^{(n)})_{n\in M_1 \subseteq \mathbb{N}}$. Mit gleichem Argument besitzt auch $(x_2^{(n)})_{n\in M_1}$ eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt ein $z_2 \in \mathbb{K}$ und eine Indexmenge $M_2 = \{n_k^{(2)} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_1$ mit

$$\lim_{k\to\infty} x_2^{\left(n_k^{(2)}\right)} = z_2.$$

Da $M_2 \subseteq M_1$, gilt aber auch

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{\left(n_k^{(2)}\right)} = z_1.$$

Iteration dieses Verfahrens liefert für $r \geq 2$:
$(x_r^{(n)})_{n\in M_{r-1}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, also existiert ein $z_r \in \mathbb{K}$ und eine Indexmenge $M_r = \{n_k^{(r)} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_{r-1}$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} x_r^{\left(n_k^{(r)}\right)} = z_r \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} x_m^{\left(n_k^{(r)}\right)} = z_m \text{ für alle } m \leq r.$$

Darstellung der Ergebnisse des Verfahrens:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots, n_r^{(1)}, \ldots\}: &\qquad \lim_{k\to\infty} x_1^{\left(n_k^{(m)}\right)} &= z_1 \quad \forall\, m \geq 1\\
M_2 &= \{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_r^{(2)}, \ldots\}: &\qquad \lim_{k\to\infty} x_2^{\left(n_k^{(m)}\right)} &= z_2 \quad \forall\, m \geq 2\\
&\vdots & &\vdots\\
M_r &= \{n_1^{(r)}, n_2^{(r)}, \ldots, n_r^{(r)}, \ldots\}: &\qquad \lim_{k\to\infty} x_r^{\left(n_k^{(m)}\right)} &= z_r \quad \forall\, m \geq r\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Wählt man nun die Diagonalelemente aus den obigen Indexmengen, also $M := \{n_k^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$, so gilt offensichtlich

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)} = z_i \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Wir haben somit eine Teilfolge von $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, die gliedweise gegen ein $(z_i)_i$ konvergiert. Nun bleibt noch zu zeigen, dass

$$(z_i)_i \in \ell^p \quad \text{und} \quad \|(x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)})_{k\in\mathbb{N}} - (z_i)_i\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{i=n}^{\infty} |x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)}|^p < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_k. \tag{2}$$

Also gilt insbesondere für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$|x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)}|^p < \varepsilon \quad \forall\, i \geq N_k,$$

d.h. also

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)} = 0 \quad \forall\, i \geq N_k$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes liefert dann $z_i = 0$ für alle $i \geq N_k$ und daher sofort

$$\|(z_i)_i\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p = \sum_{i=1}^{N_k} |z_i|^p < \infty \quad \Longrightarrow \quad (z_i)_i \in \ell^p.$$

Weiterhin liefert die gliedweise Konvergenz der Teilfolge zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $K_i \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)} - z_i|^p < \frac{\varepsilon}{N_k - 1} \quad \forall\, k \geq K_i. \tag{3}$$

Wähle nun $K = \max\{K_i \mid i \in \{1, \ldots, N_k - 1\}\}$. Dann gilt nach (2) und (3) für alle $k \geq K$:

$$\begin{aligned}
\|(x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)})_{k\in\mathbb{N}} - (z_i)_i\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)} - z_i|^p &= \sum_{i=1}^{N_k-1} |x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)} - z_i|^p + \sum_{i=N_k}^{\infty} |x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)}|^p\\
&< (N_k - 1)\frac{\varepsilon}{N_k - 1} + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Es folgt das gewünschte Resultat

$$\|(x_i^{\left(n_k^{(k)}\right)})_{k\in\mathbb{N}} - (z_i)_i\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und die relative Kompaktheit von K ist bewiesen. $\square$