Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Sommersemester 2009

Funktionalanalysis I

1. Übungsblatt

Abgabe: 29.04.2009 **vor Beginn** der Übung

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Sei X ein normierter Raum und d die induzierte Metrik. Zeige, dass dann für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\overline{B_\varepsilon(x)} = \overline{\{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}} = \{y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

b) Zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage in metrischen Räumen im Allgemeinen nicht gilt.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei X ein normierter Raum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist separabel.

(ii) Die abgeschlossene Einheitskugel $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ ist separabel.

(iii) Der Einheitssphäre $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ ist separabel.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass für alle $x \in \ell^1$ gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $K \subseteq c_0$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) K ist $\|\cdot\|_\infty$-relativ kompakt.

(ii) K ist beschränkt und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

gleichmäßig für alle $(x_n)_n \in K$.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)