Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Sommersemester 2009

Funktionalanalysis I

2. Übungsblatt

Abgabe: 06.05.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Beweise oder widerlege die relative Kompaktheit der folgenden Mengen in $(C([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$:

$$M_1 = \{f \in C[a,b] \mid f \text{ ist ein Monom}\},$$
$$M_2 = \{f \in C^1[a,b] \mid |f(x)| \leq x,\ |f'(x)| \leq x \text{ für alle } x \in [a,b]\},$$
$$M_3 = \{f \in C^1[a,b] \mid f(0) = 0,\ |f'(x)| \leq 2 + \sin(\pi x) \text{ für alle } x \in [a,b]\}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei X ein normierter Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Für $x \in X$ sei

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$ ist Lipschitz-stetig und $A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

b) Ist $\dim X < \infty$, so darf im Rieszschen Lemma auch $\delta = 0$ zugelassen werden.
(Das Rieszsche Lemma wird in der Übung bewiesen.)

3. Aufgabe (5 Punkte)

Zeige mit dem Satz von Baire, dass keine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert, die in allen rationalen Zahlen aus $[0,1]$ stetig und in allen irrationalen Zahlen aus $[0,1]$ unstetig ist.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $X = \{(m, n) \mid n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ und $\mathcal{U}$ ein Umgebungsfilter von X, gegeben durch

$$\mathcal{U}((0,0)) := \{U \in \mathcal{P}(X) \mid (0,0) \in U \text{ und } \{n \in \mathbb{N} \mid (m,n) \notin U\} \text{ ist endlich für fast alle } m \in \mathbb{N}\}$$

und für $(m, n) \neq (0, 0)$:

$$\mathcal{U}((m,n)) := \{U \in \mathcal{P}(X) \mid (m,n) \in U\}.$$

Sei weiterhin $\mathcal{T}$ die zugehörigen Topologie.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) $(0,0)$ ist ein Häufungspunkt von $X \setminus \{(0,0)\}$, d.h.

$$\forall U \in \mathcal{U}((0,0)): \quad U \cap (X \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset,$$

aber es gibt keine Folge in $X \setminus \{(0,0)\}$, die gegen $(0,0)$ konvergiert.
Gebe ein Netz in $X \setminus \{(0,0)\}$ an, dass gegen $(0,0)$ konvergiert.

b) Es existiert eine Folge $(x_n)_n$ in $X \setminus \{(0,0)\}$, die $(0,0)$ als Häufungspunkt hat, d.h. für die gilt

$$\forall U \in \mathcal{U}((0,0)): \quad \forall m \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m \text{ mit } x_n \in U,$$

aber $(x_n)_n$ besitzt keine Teilfolge, die gegen $(0,0)$ konvergiert.

c) Sei $\mathcal{T}_1$ die diskrete Topologie auf X. Dann ist die Abbildung $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_1)$ folgenstetig, aber nicht stetig.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)