Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2009
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Funktionalanalysis I

3. Übungsblatt

Abgabe: 13.05.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (3 Punkte)
Sei X ein Vektorraum mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Zeige, dass die durch diese Normen erzeugten Topologien übereinstimmen.

2. Aufgabe (7 Punkte)
Für $0 < p < 1$ betrachte den Raum $\ell^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $\ell^p(\mathbb{N})$ ist ein Vektorraum.

b) Wird durch

$$d_p((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \quad \text{für } (x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^p(\mathbb{N})$$

eine Metrik auf $\ell^p(\mathbb{N})$ definiert, so ist $\ell^p(\mathbb{N})$ mit der von d_p induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum.

c) $\ell^p(\mathbb{N})$ ist kein lokal konvexer Vektorraum.

d) Der topologische Dualraum von $\ell^p(\mathbb{N})$ ist $\{0\}$, d.h. $\Phi : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein stetiges lineares Funktional, wenn $\Phi \equiv 0$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und $1 < p < \infty$. Zeige, dass der durch

$$M((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

gegebene Operator $M : \ell^p \to \ell^p$ wohldefiniert und beschränkt ist. Bestimme weiterhin $\|M\|$.

4. Aufgabe (6 Punkte)
Betrachte den Raum der reellen Polynome $\mathbb{R}[x]$ mit der Norm

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}[x] \to [0, \infty), \quad \|p\| := \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)|.$$

Sei weiterhin zu jedem $x \in \mathbb{R}$ die Punktauswertung $f_x : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $f_x(p) := p(x)$ gegeben.

a) Zeige, dass f_x für alle $x \in [-1, 1]$ ein beschränktes (und somit stetiges) lineares Funktional ist und berechne $\|p_n\|$ für die Monome $p_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Zeige, dass das lineare Funktional f_x für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ nicht beschränkt ist.

c) Sind die folgenden Operatoren beschränkt? Beweise deine Aussage.

$$\begin{aligned} S &: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad p \mapsto p(x-1), \\ D &: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad p \mapsto p', \\ I &: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad I(p)(x) := \int_{-1}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)