Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Sommersemester 2009

# Funktionalanalysis I

## 4. Übungsblatt

Abgabe: 20.05.2009 **vor Beginn** der Übung

---

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Zeige, dass der topologische Dualraum von $c_0$ isometrisch isomorph zu $\ell^1$ ist, d.h.

$$(c_0)^* \cong \ell^1.$$

**2. Aufgabe** (5 Punkte)

Seien $X, Y$ Banachräume und $A : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear und partiell stetig, d.h. für alle $x \in X$ sei $y \mapsto A(x, y)$ stetig und für alle $y \in X$ sei $x \mapsto A(x, y)$ stetig. Zeige mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass $A$ stetig ist.

**3. Aufgabe** (6 Punkte)

Für einen normierten Raum $X$ und einen beschränkten Operator $A : X \to X$ definiere den sog. *Spektralradius* von $A$ durch

$$r(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Sei $X$ ein Banachraum und $A \in L(X)$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

b) Ist $r(A) < 1$, so ist der Operator $(I - A)$ invertierbar und es gilt $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

c) Konvergiert die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, so gilt $r(A) < 1$.

*Hinweis: Zeige, dass genau dann* $r(A) < 1$, *wenn ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $\|A^N\| < 1$.

**4. Aufgabe** (5 Punkte)

Löse die Integralgleichung

$$u(s) - \int_0^1 stu(t)\,\mathrm{d}t = \sin(\pi s), \quad s \in [0, 1],\ u \in C[0, 1]$$

mit Hilfe der Neumannschen Reihe.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)