Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2009
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Funktionalanalysis I

5. Übungsblatt

Abgabe: 27.05.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Betrachte die Operatoren $L, L_n : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, gegeben durch

$$Lf(t) = f'(t) \quad \text{und} \quad L_n f(t) = \frac{f(t) - f(t-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \quad \text{für } f \in C^1[0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) L ist abgeschlossen, aber nicht stetig (d.h. unbeschränkt).

b) L_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt.

c) L_n konvergiert stark gegen L.

d) L_n konvergiert aber nicht gegen L bzgl. der Operatornorm.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Für Banachräume X und Y betrachte die Menge

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{A \in L(X,Y) \mid A \text{ ist injektiv und } \operatorname{ran}(A) \text{ ist abgeschlossen}\}$$

und beweise die folgenden Aussagen:

a) Für alle $A \in L(X,Y)$ gilt:

$$A \in \mathcal{R}(X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, C > 0 : \quad \|Ax\| \geq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

b) $\mathcal{R}(X,Y)$ ist offen in $L(X,Y)$.

c) Ist $\dim X < \infty$, so gilt für alle $A \in L(X,Y)$:

$$A \in \mathcal{R}(X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ injektiv}.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Seien X, Y normierte Räume und $A : X \supseteq D \to Y$.

a) Sei $X = Y = \ell^2$ und A gegeben durch

$$A(x_k)_k = (kx_k)_k \quad \text{für } (x_k)_k \in D.$$

Untersuche A auf Abgeschlossenheit für die beiden Fälle

(i) $D = \{(x_k)_k \in \ell^2 \mid (kx_k)_k \in \ell^2\}$,

(ii) $D = c_{00} = \{(x_k)_k \in \ell^2 \mid \exists\, N \in \mathbb{N} :\ x_k = 0\, \forall\, k \geq N\}$.

b) Sei $D \subseteq X$ ein Unterraum und $Ax = 0$ für alle $x \in D$. Ist A abgeschlossen?

c) Seien X, Y Banachräume und $D \subseteq X$ ein Unterraum. Zeige: Ist A linear, injektiv und abgeschlossen, so ist auch $A^{-1} : Y \supseteq \operatorname{ran}(A) \to X$ abgeschlossen.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)