Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Sommersemester 2009

Funktionalanalysis I

6. Übungsblatt

Abgabe: 03.06.2009 **vor Beginn** der Übung

Dies ist das letzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte!

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Zu $x = (x_n) \in \ell^1$ definiere $\varphi_x \in (\ell^\infty)'$ durch

$$\varphi_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{für } y = (y_n)_n \in \ell^\infty.$$

Zeige, dass ein $\varphi \in (\ell^\infty)'$ existiert, welches nicht von der Form $\varphi = \varphi_x$ für ein $x \in \ell^1$ ist.
Hinweis: Wende den Satz von Hahn-Banach auf $c_0 \subset \ell^\infty$ an.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei X ein Banachraum, $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $F \in L(U, \ell^\infty)$. Zeige, dass ein $G \in L(X, \ell^\infty)$ existiert mit $G\big|_U = F$ und $\|G\| = \|F\|$.
Hinweis: Betrachte $P_j \circ F$, wobei $P_j : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ die Projektion auf die j-te Komponente einer Folge aus ℓ^∞ ist.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei X ein separabler Banachraum. Zeige, dass ein abgeschlossener Unterraum $U \subseteq X$ existiert, der isometrisch isomorph zu X ist.
Hinweis: Betrachte einen Operator $T : X \to \ell^\infty$, dessen Komponenten geeignete stetige Funktionale auf X sind und setze $U := \operatorname{ran}(T)$.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)