

Funktionalanalysis I

7. Übungsblatt

Abgabe: 10.06.2009 vor **Beginn** der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei X ein normierter Vektorraum und $U \subseteq X$ ein Unterraum. Zeige, dass U genau dann dicht in X liegt, wenn es zu jedem $\varphi \in U'$ eine eindeutige stetige, lineare Fortsetzung auf X gibt.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $U, V \subseteq X$ Unterräume. Zeige: Ist U abgeschlossen und V endlichdimensional, so ist $W := U + V$ ein abgeschlossener Unterraum von X .

Hinweis: Induktion über die Dimension von V .

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei X ein normierter Raum und $V_1, V_2 \subseteq X$ konvex mit $\text{int } V_1 \neq \emptyset$ und $(\text{int } V_1) \cap V_2 = \emptyset$. Zeige, dass dann ein $f \in X'$, $f \neq 0$, existiert, so dass

$$\text{Re } f(v_1) \leq \text{Re } f(v_2) \quad \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien X und Y isomorphe Banachräume. Zeige: Ist X reflexiv, so ist auch Y reflexiv.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)