Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2009
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Funktionalanalysis I

8. Übungsblatt

Abgabe: 17.06.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien X und Y Banachräume und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist stetig

(ii) $A : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ ist stetig

(iii) Für alle $\varphi \in Y'$ ist $\varphi \circ A \in X'$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ heißt *schwache Cauchyfolge*, wenn die skalare Folge $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ für alle $\varphi \in X'$ eine Cauchyfolge ist. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Jede schwache Cauchyfolge ist beschränkt.

b) Ist X ein reflexiver Banachraum, so ist jede schwache Cauchyfolge schwach konvergent.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $1 < p < \infty$. Zeige, dass eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^p$ genau dann schwach gegen ein $x \in \ell^p$ konvergiert, wenn

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^{(n)}\|_p < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Zeige weiterhin anhand eines Beispiels, dass diese Aussage für $p = 1$ falsch ist.
Hinweis: Verwende die bereits bewiesene Tatsache $(\ell^p)' \cong \ell^q$ *mit* $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $1 < p < \infty$ und $S = \{x \in \ell^p \mid \|x\|_p = 1\}$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) S ist abgeschlossen, aber nicht konvex in ℓ^p.

b) S ist nicht schwach abgeschlossen.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)