Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2009
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Funktionalanalysis I

9. Übungsblatt

Abgabe: 24.06.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (7 Punkte)
Sei X ein Banachraum und $(f_n)_n \subseteq X'$ eine Folge. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Es gilt genau dann $f_n \rightharpoonup^* f \in X'$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (i) Es gibt ein $K > 0$, so dass $\|f_n\|_{X'} \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) Es existiert eine dichte Teilmenge $A \subseteq X$, so dass $(f_n(x))_n$ für alle $x \in A$ eine Cauchyfolge ist.

b) Ist $(f_n)_n$ eine schwache* Cauchyfolge, d.h. ist $(f_n(x))_n$ für alle $x \in X$ eine Cauchyfolge, so ist $(f_n)_n$ konvergent.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei X ein reflexiver normierter Raum und $\emptyset \neq K \subseteq X$ abgeschlossen und konvex. Zeige, dass zu jedem $x \in X$ eine "beste Approximation" in K existiert, d.h.

$$\forall\, x \in K\; \exists\, y \in K: \quad \|x - y\| = d(x, K) := \inf\{\|x - z\| \mid z \in K\}.$$

Hinweis: Betrachte zunächst eine Folge $(y_n)_n \subseteq K$ mit $\|x - y_n\| \to d(x, K)$.

3. Aufgabe (8 Punkte)
Sei X ein Banachraum. Eine Folge $\sigma = (x_n)_n \subseteq X$ heisst *separierend*, wenn $X = \overline{\text{lin}}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch eine solche Folge wird wie folgt eine Norm auf X' definiert:

$$\|f\|_\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n)|, \quad f \in X'.$$

Beweise für separierende Folgen $\sigma = (x_n)_n$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_\sigma$ die folgenden Aussagen:

a) Ist $(f_n)_n \subseteq X'$ (norm-)beschränkt und $f \in X'$, so gilt

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_n - f\|_\sigma \to 0.$$

b) $B_{X'} = \{f \in X' \mid \|f\|_{X'} \leq 1\}$ ist kompakt in $(X', \|\cdot\|_\sigma)$.

c) Sei $(y_n)_n \subseteq X$ mit $y_n \rightharpoonup 0$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, $f_0 \in B_{X'}$ und $\delta > 0$, so dass für alle $f \in X'$ gilt:

$$\|f - f_0\|_\sigma \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y_n)| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N.$$

Anleitung: Zeige zunächst, dass die Mengen

$$A_k = \{f \in B_{X'} \mid |f(y_n)| \leq \varepsilon \,\forall\, n \geq k\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen in $(X', \|\cdot\|_\sigma)$ sind und verwende anschliessend den Satz von Baire.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)