Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2009
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Funktionalanalysis I

10. Übungsblatt

Abgabe: 01.07.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien X, Y Banachräume und $A \in L(X,Y)$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $A' : Y' \to X'$ ist ein abgeschlossener Operator.

b) $A' : Y' \to X'$ ist schwach*-stetig (d.h. $A' : (Y', \sigma(Y',Y)) \to (X', \sigma(X',X))$ ist stetig).

c) Ist A invertierbar, so ist auch $(A')^{-1} \in L(X',Y')$ mit $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Seien X und Y Banachräume. Seien weiterhin $A : X \to Y$ und $B : Y' \to X'$ linear mit

$$y'(Ax) = (By')(x) \quad \forall\, x \in X,\ y' \in Y'.$$

Zeige, dass dann die Operatoren A und B stetig sind.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien X, Y Banachräume und $A \in L(X,Y)$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist A kompakt, so gilt für alle $(x_n)_n \subseteq X$, $x \in X$:

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \to Ax.$$

b) Ist X reflexiv und gilt für alle $(x_n)_n \subseteq X$, $x \in X$

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \to Ax,$$

so ist A ein kompakter Operator.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Für ein festes $y = (y_n)_n \in \ell^\infty$ definiere den Operator $A_y : \ell^2 \to \ell^2$ durch

$$A_y(x) := (x_n y_n)_n \quad \text{für } x = (x_n)_n \in \ell^2.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) A_y ist wohldefiniert, $A_y \in L(\ell^2)$ und $\|A_y\| = \|y\|_\infty$.

b) A_y ist genau dann kompakt, wenn $y \in c_0$.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)