Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Sommersemester 2009

Funktionalanalysis I

11. Übungsblatt

Abgabe: 08.07.2009 **vor Beginn** der Übung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei X ein Banachraum und A, $B \in L(X)$. Beweise die folgende Resolventengleichungen:

a) Für alle $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ gilt

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(A - B)R_\lambda(B).$$

b) Für alle λ, $\mu \in \rho(A)$ gilt

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A).$$

c) Gilt $AB = BA$, so folgt für alle $\lambda \in \rho(A)$

$$R_\lambda(A)B = BR_\lambda(A).$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$ invertierbar. Zeige, dass dann

$$\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

b) Sei $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ beschränkt}\}$ versehen mit der Supremumsnorm. Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $A_s : X \to X$ punktweise definiert durch

$$A_s(f)(x) := f(x + s) \quad \text{für } f \in X,\, x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass für das Spektrum gilt:

$$\sigma(A_s) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$$

und bestimme seine Bestandteile $\sigma_p(A_s)$, $\sigma_c(A_s)$ und $\sigma_r(A_s)$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$ mit $\|A\| \in \sigma(A)$. Zeige, dass dann $\|I + A\| = 1 + \|A\|$ gilt.
Hinweis: approximatives Punktspektrum, siehe Übung.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)