Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2009
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS09/FA1/

Funktionalanalysis I

12. Übungsblatt

Abgabe: 15.07.2009 **vor Beginn** der Übung

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters!

---

1. Aufgabe (6 Punkte)
Betrachte den sog. *Volterra-Operator* $V : C([0,1]) \to C([0,1])$, definiert durch

$$V(f)(x) := \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s, \quad f \in C([0,1]),\ x \in [0,1].$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) V ist kompakt.

b) $\sigma(V) = \{0\}$.
Hinweis: Begründe zunächst, dass $\sigma(V) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(V)$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Sei $1 \leq p < q < \infty$. Beweise die folgenden Aussagen:

(i) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, so gilt

$$(b-a)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|x\|_q, \quad \forall\, x \in L^q([a,b]).$$

Folgere zudem hieraus, dass $L^q([a,b]) \subseteq L^p([a,b])$.

(ii) Es gilt jedoch nicht $L^q([0,\infty)) \subseteq L^p([0,\infty))$.

b) Beweise die Lyapunovsche Ungleichung:
Seien $1 \leq p, q < \infty$ und $t \in (0,1)$. Dann gilt mit $\frac{1}{r} := \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}$ die Ungleichung

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p^{1-t} \|x\|_q^t, \quad \forall\, x \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}).$$

3. Aufgabe (6 Punkte)
Zeige, dass

$$L^1(0,1) \subsetneqq (L^\infty(0,1))'.$$

Hinweis: Zeige, dass $L^1(0,1)$ stetig, aber nicht surjektiv in $(L^\infty(0,1))'$ eingebettet werden kann. Betrachte hierzu für $x \in [0,1]$ und $f \in C[0,1]$ das Punktmaß $\delta_x(f) = f(x)$ und benutze den Satz von Hahn-Banach um einen Widerspruch zu erlangen.

(Gesamtpunktzahl: 20 Punkte)