Mitschrift zur 9. Übung vom 17.06.09

Wiederholung: Toplogien auf dem Dualraum

Sei X ein normierter Raum.
Wir haben bereits die schwache Toplogie $\sigma(X, X')$ auf X kennengelernt, die von den Halbnormen $p_f = |f(\cdot)|$, $f \in X'$ erzeugt wird.

Topologien auf dem Dualraum X':

- die Normtopolgie auf X' wird erzeugt durch die Halbnorm $p = \|\cdot\|_{X'}$
- die schwache Toplogie $\sigma(X', X'')$ wird erzeugt durch die Halbnormen $p_\varphi = |\varphi(\cdot)|$, $\varphi \in X'$
- die schwach*-Toplogie $\sigma(X', X)$ wird erzeugt durch die Halbnormen $p_{i_x} = |i_x(\cdot)|$, $x \in X$

Hierbei bezeichne $i : X \to X''$ die kanonische Einbettung. Wegen $i(X) \subseteq X''$ ist die schwach*-Topologie gröber als die schwache Topologie auf X', d.h. es gilt

$$\sigma(X', X) \subseteq \sigma(X', X'') \subseteq \|\cdot\|_{X'}\text{-Topologie.}$$

Konvergenzbegriffe im Dualraum:

Sei $(f_n)_n \subseteq X'$ und $f \in X'$

- Normkonvergenz: $f_n \to f$ gdw. $\|f_n - f\|_{X'} \to 0$
- Schwache Konvergenz: $f_n \rightharpoonup f$ gdw. $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ für alle $\varphi \in X''$.
- Schwach*-Konvergenz: $f_n \rightharpoonup^* f$ gdw. $i_x(f_n) = f_n(x) \to f(x) = i_x(f)$ für alle $x \in X$.

Wegen obiger Inklusionen der zugrundeliegenden Topologien gelten für diese Konvergenzbegriffe die Zusammenhänge

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \Longrightarrow \quad f_n \rightharpoonup f \quad \Longrightarrow \quad f_n \to f.$$

Ist X reflexiv, so gilt wegen $i(X) = X''$ auch $\sigma(X', X) = \sigma(X', X'')$ und folglich konvergiert eine Folge $(f_n)_n \subseteq X'$ genau dann schwach gegen ein $f \in X'$, wenn sie schwach* gegen f konvergiert.

Neben anderen wichtigen Eigenschaften schwach*-konvergenter Folgen, haben wir in der VL kennengelernt:

- In einem Banachraum ist jede schwach*-konvergente Folge norm-beschränkt.

Wir wollen nun zeigen, dass dies i.A. nicht mehr gilt, wenn der Raum nicht vollständig ist.
Beweis:
Betrachte den nicht vollständigen Raum $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ und eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$\varphi_n : c_{00} \to \mathbb{K}, \quad (x_k)_k \mapsto n \cdot x_n.$$

Die Linearität von φ_n ist klar, die Stetigkeit folgt aus

$$\|\varphi_n\|_{(c_{00})'} = \sup_{(x_k)\in B_{c_{00}}} |nx_n| \leq n \cdot \sup_{(x_k)\in B_{c_{00}}} |x_n| \leq n.$$

Somit ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (c_{00})'$ und es gilt $\varphi_n \rightharpoonup^* 0$, denn:
Ist $(x_k)_k \in c_{00}$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n = 0$ für alle $n \geq N$ und folglich gilt dann auch $|\varphi_n(x_k)_k| = |n| \cdot |x_n| = 0$ für $n \geq N$. Somit folgt $\varphi_n(x_k)_k \to 0$ für alle $(x_k)_k \in c_{00}$, also $\varphi_n \rightharpoonup^* 0$.
Zeige nun noch, dass $(\varphi_n)_n$ nicht norm-beschränkt ist. Betrachte hierzu die Folge

$$e^{(n)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0, \ldots) \in c_{00}.$$

Da $\|e^{(n)}\|_\infty = 1$, folgt

$$\|\varphi_n\|_{(c_{00})'} = \sup_{(x_k)\in B_{c_{00}}} |nx_n| \geq |n \cdot e^{(n)}| = n$$

und daher $\|\varphi_n\|_{(c_{00})'} = n$. Somit kann die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in der $\|\cdot\|_{(c_{00})'}$-Norm beschränkt sein. □

- Sei X ein Banachraum. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{ll} (f_n)_n \subseteq X', & f_n \rightharpoonup^* f \in X' \\ (x_n)_n \subseteq X, & x_n \to x \in X. \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f_n(x_n) \to f(x).$$

Auch diese Aussage gilt i.A. nicht, wenn X nicht vollständig ist.
Beweis:
Betrachte wiederum den Raum $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ und die $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (c_{00})'$ mit $\varphi_n \rightharpoonup^* 0$ wie oben. Sei weiterhin $(x_n)_n \subseteq c_{00}$ gegeben durch

$$x^{(k)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{k}}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \ldots) \in c_{00}.$$

Dann ist $x^{(k)} \to 0$ in c_{00}, da $\|x^{(k)}\|_\infty = \frac{1}{k} \to 0$, aber

$$\varphi_n(x^{(k)}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\to 0.$$

□

Schwache Kompaktheit:

In nicht metrisierbaren Räumen ist die schwache Kompaktheit i.A. nicht äquivalent zur schwachen Folgenkompaktheit. Der Satz von Eberlein-Smulian liefert allerdings den folgenden Zusammenhang:
Sei X ein Banachraum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

$$A \text{ schwach folgenkompakt} \Longleftrightarrow \overline{A}^{\sigma(X,X')} \text{ schwach kompakt.}$$

Weiterhin wissen wir nach Übung/VL, dass:

$$X \text{ reflexiv und } A \text{ beschränkt} \Longrightarrow A \text{ schwach folgenkompakt.}$$

Wir beweisen nun die folgende Behauptungen:

- Sei X ein reflexiver normierter Raum und $K \subseteq X$. Ist K konvex, abgeschlossen und beschränkt, so ist K schwach kompakt.

Beweis:
Da K beschränkt ist, ist K schwach folgenkompakt und folglich $\overline{K}^{\sigma(X,X')}$ schwach kompakt. Desweiteren folgt aus der Konvexität und Abgeschlossenheit die schwache Abgeschlossenheit von K. Also ist $K = \overline{K}^{\sigma(X,X')}$ schwach kompakt. □

- Sei X ein reflexiver normierter Raum und $K \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Weiterhin sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, konvex und koerzitiv, d.h. es gelte

$$f(x) \to \infty \quad \text{für} \quad \|x\| \to \infty.$$

Dann nimmt f sein Minimum auf K an.

Beweis:
Sei $(x_n)_n \subseteq K$ eine Minimalfolge von f, d.h. es gelte

$$f(x_n) \to \inf_{x\in K} f(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Da f koerzitiv ist, folgt, dass $(x_n)_n$ beschränkt sein muss. Somit impliziert die Reflexivität von X, dass $(x_n)_n$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, d.h.

$$\exists\, (x_{n_k})_k,\, x_0 \in X : \quad x_{n_k} \rightharpoonup x_0.$$

Da ausserdem K konvex und abgeschlossen und somit schwach abgeschlossen ist, erhalten wir $x_0 \in K$.
Gemäss dem Satz von Mazur existiert nun eine Folge von endlichen Konvexkombination von $\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, die norm-konvergent gegen x_0 ist. Genauer: Es gibt eine Folge

$$y_j := \sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k^{(j)} x_{n_k} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lambda_k^{(j)} \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k^{(j)} = 1,$$

so dass $y_j \to x_0$. Da K konvex ist, gilt auch $(y_j)_j \subseteq K$ und aus der Stetigkeit und Konvexität von f folgt zunächst

$$f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(y_j) \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k^{(j)} f(x_{n_k}).$$

Wählt man $f(x_{n_{k(j)}}) := \max\{f(x_{n_k}) \mid k = 1, \ldots, N_j\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k^{(j)} f(x_{n_k}) \leq f(x_{n_{k(j)}}) \underbrace{\sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k^{(j)}}_{=1} = f(x_{n_{k(j)}}).$$

Da $f(x_{n_{k(j)}})_j$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $f(x_n)_n$ ist, erhalten wir schliesslich

$$f(x_0) \leq \lim_{j\to\infty} f(x_{n_{k(j)}}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{x\in K} f(x).$$

Wegen $x_0 \in K$, muss also gelten $f(x_0) = \inf_{x\in K} f(x)$ und f nimmt also sein Minimum auf K an. □

Schwache Konvergenz in ℓ^1:

Wir beweisen nun das aus der VL bekannte Lemma von Schur. Dazu werden wir die Teilergebnisse verwenden, die ihr in der 3. Hausaufgabe vom 9. Übungsblatt beweisen werdet.
Zur Erinnerung:

> **3. Aufgabe**
> Sei X ein Banachraum. Eine Folge $\sigma = (x_n)_n \subseteq X$ heisst *separierend*, wenn $X = \overline{\text{lin}}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch eine solche Folge wird wie folgt eine Norm auf X' definiert:
> $$\|f\|_\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n)|, \quad f \in X'.$$
>
> c) Sei $(y_n)_n \subseteq X$ mit $y_n \rightharpoonup 0$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, $f_0 \in B_{X'}$ und $\delta > 0$, so dass für alle $f \in X'$ gilt:
> $$\|f - f_0\|_\sigma \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y_n)| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N.$$

<u>Lemma von Schur:</u>

- Eine Folge in ℓ^1 ist genau dann schwach konvergent, wenn sie normkonvergent ist.

Beweis:
Wir wissen bereits, dass ℓ^1 separabel ist mit $\ell^1 = \overline{\text{lin}}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Daher ist $\sigma = (e_n)_n$ eine separierende Folge in ℓ^1. Desweiteren haben wir bereits bewiesen, dass $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$, wobei für alle $y = (y_n)_n \in \ell^\infty$ gilt
$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k \quad \text{für} \quad x = (x_n)_n \in \ell^1.$$
Daher wird durch
$$\|y\|_\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |y(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k \delta_{nk} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |y_n| \quad \text{für } y = (y_n)_n \in \ell^\infty$$
eine Norm auf $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ definiert.
Sei nun zunächst $(x^{(n)})_n \subseteq \ell^1$ mit $x^{(n)} \rightharpoonup 0$. Zeige, dass dann auch $\|x^{(n)}\|_1 \to 0$.
Sei $\varepsilon > 0$.
Dann existiert nach Hausaufgabe 3 c) ein $N \in \mathbb{N}$, $y^{(0)} \in \ell^\infty$ mit $\|y^{(0)}\|_\infty \leq 1$ und $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \ell^\infty$ gilt:
$$\|y^{(0)} - y\|_\sigma \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |y(x^{(n)})| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k^{(n)} \right| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N. \tag{1}$$
Sei weiterhin $M \in \mathbb{N}$, so dass
$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{\delta}{2} \tag{2}$$
Da $x^{(n)} \rightharpoonup 0$, gilt $y(x^{(n)}) \to y(0) = 0$ für alle $y \in \ell^\infty$. Somit gilt dies insbesondere für die Projektionen
$$P_k : \ell^1 \to \mathbb{K}, \quad (x_n)_n \mapsto x_k, \quad k \in \mathbb{N}$$
Folglich erhalten wir auch die gliedweise Konvergenz
$$P_k(x^{(n)}) = x_k^{(n)} \to 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Für alle $1 \leq k \leq M$ existiert also ein $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $|x_k^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ für alle $n \geq n_k$. Setzen wir $n_0 = \max\{N, n_1, n_2, \ldots, n_M\}$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(n)}| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{3}$$

Sei im Folgenden stets $n \geq n_0$.
Wir wollen nun (1) verwenden und definieren daher eine geeignete Folge in ℓ^∞ gliedweise durch

$$y_k^{(n)} := \begin{cases} y_k^{(0)} & \text{für } 1 \leq k \leq M, \\ \operatorname{sign}(x_k^{(n)}) & \text{für } k > M. \end{cases}$$

Dann ist $\|y^{(n)}\|_\infty \leq \max\{\|y^{(0)}\|_\infty, 1\} = 1$, da $\|y^{(0)}\|_\infty \leq 1$. Also insbesondere auch $(y^{(n)})_n \subseteq \ell^\infty$. Ausserdem folgt mit der Definition von $(y^{(n)})_n$ und (2), dass

$$\begin{aligned} \|y^{(0)} - y^{(n)}\|_\sigma &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |y_k^{(0)} - y_k^{(n)}| = \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |y_k^{(0)} - y_k^{(n)}| \\ &\leq \left(\underbrace{\|y^{(0)}\|_\sigma}_{\leq 1} + \underbrace{\|y^{(n)}\|_\sigma}_{\leq 1} \right) \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen von (1) erfüllt und es folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)} x_k^{(n)} \right| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0 \geq N.$$

Daraus folgt nun wiederum mit der Definition von $(y^{(n)})_n$, der umgekehrten Dreiecksungleichung und (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)} x_k^{(n)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{M} y_k^{(0)} x_k^{(n)} + \sum_{k=M+1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{sign}(x_k^{(n)}) x_k^{(n)}}_{=|x_k^{(n)}|} \right| = \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| - \sum_{k=1}^{M} -y_k^{(0)} x_k^{(n)} \right| \\ &\geq \sum_{k=M+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| - \sum_{k=1}^{M} |y_k^{(0)}||x_k^{(n)}| \geq \sum_{k=M+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| - \underbrace{\|y^{(0)}\|_\sigma}_{\leq 1} \underbrace{\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(n)}|}_{<\varepsilon} > \sum_{k=M+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| - \varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < 2\varepsilon.$$

Somit folgt dann mit (3) das gewünschte Resultat:

$$\|x^{(n)}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^{M} |x_k^{(n)}| + \sum_{k=M+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Wir haben also gezeigt, dass für alle $(x^{(n)})_n \subseteq \ell^1$ aus $x^{(n)} \rightharpoonup 0$ stets $\|x^{(n)}\|_1 \to 0$ folgt.
Sei nun $(x^{(n)})_n \subseteq \ell^1$ mit $x^{(n)} \rightharpoonup x$ für ein beliebiges $x \in \ell^1$. Dann gilt auch $x^{(n)} - x \rightharpoonup 0$ und mit eben Bewiesenem $\|x^{(n)} - x\|_1 \to 0$. $\square$