# 3 Lyapunovgleichungen und Stabilisierung

In diesem Kapitel gehen wir der Frage nach, wie eine stabilisierende Feedback-Matrix für LTI Systeme berechnet werden kann. Aus Satz 2.10 wissen wir, daß die Berechnung einer stabilisierenden Steuerungsfunktion $u(t)$ mit Hilfe von Zustandsrückführung möglich ist. Dazu benötigen wir $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so daß $\Lambda\,(A+BF) \subset \mathbb{C}^-$. Mit $u(t) := Fx(t)$ folgt, daß die Lösungstrajektorie von

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BFx = (A+BF)x(t)$$

genau dann asymptotisch stabil ist, wenn $F$ stabilisierend ist, d.h. $\Lambda\,(A+BF) \subset \mathbb{C}^-$ erfüllt.

Eine stabilisierende Feedback-Lösung erhält man unter bestimmten Voraussetzungen durch die Lösung von Optimalsteuerungsproblemen, siehe Kapitel 4.

Hier wollen wir zunächst zwei einfachere Methoden kennenlernen.

**Direkte Methode nach Lyapunov** Mit Hilfe der Lyapunov'schen Stabilitätstheorie und der Lösung eines linearen Gleichungssystem kann eine stabilisierende Feedback-Matrix direkt berechnet werden.

Diese Methode ist ein Spezialfall einer allgemeineren Theorie für nichtlineare Systeme, die auf der Berechnung von *Lyapunovfunktionen* für nichtlineare Systeme der Form $\dot{x} = f(x)$ beruht. Dabei sucht man eine positiv definite, differenzierbare Funktion $V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, so daß die Richtungsableitung von $V$ in Richtung $f$, bezeichnet mit $L_f V$, $L_f V(x) < 0$ für alle $x \neq 0$ erfüllt. Kann man noch sicherstellen, daß $V(x) \to 0$ falls $x \to 0$, dann gilt für jede Lösungstrajektorie $\xi(t)$, daß $V(\xi(t))$ streng monoton fällt und damit $\xi(t) \to 0$, d.h., die Lösungstrajektorie ist asymptotisch stabil. I.a. ist es nicht immer einfach, eine Lyapunovfunktion zu bestimmen. Der Begriff Lyapunovfunktion wird hier (also bei LTI Systemen) keine besondere Rolle spielen; es sei hier nur erwähnt, daß bei der hier vorgestellten Methode implizit verwendet wird, daß für asymptotisch stabile und steuerbare LTI Systeme $V(x) = x^T P x$, $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lyapunovfunktion des freien (ungesteuerten, d.h. $u \equiv 0$) Systems ist, wobei $P$ die Beobachtbarkeits-Gram'sche Matrix des Systems ist.

**Polvorgabe** Im allgemeinen besteht das Polvorgabe-Problem darin, für eine gegeben Menge $\mathcal{L} := \{\mu_1, \ldots \mu_n\} \subset \mathbb{C}$ eine Feedback-Matrix $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so zu bestimmen, daß $\Lambda\,(A+BF) = \mathcal{L}$. Wählt man $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^-$, so hat man damit das System stabilisiert.

Dieser Ansatz läßt sich nicht auf nichtlineare Systeme verallgemeinern. (Erinnere: Für LTV Systeme ist $\Lambda\,(A(t) + B(t)F(t)) \in \mathbb{C}^-$ weder hinreichend und notwendig für Stabilität. Lokal können nichtlineare Systeme durch LTV Systeme genähert werden, d.h., zur Stabilisierung mit Polvorgabe müßte man zumindest LTV Systeme stabilisieren können, und selbst das ist hier nicht ausreichend.)

Zunächst werden wir uns mir der Methode nach Lyapunov beschäftigen. Die Darstellung des nächsten Abschnitts orientiert sich an [5, § 13] und [2].

## 3.1 Stabilitätstheorie nach Lyapunov

In diesem Abschnitt werden lineare Matrixgleichungen eine wesentliche Rolle spielen. Daher werden wir uns zunächst mit einigen Eigenschaften solcher Gleichungen befassen. Betrachte dazu die *Sylvestergleichung*

$$AX + XB = W \tag{3.1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und der unbekannten Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine lineare Gleichung in den $n \cdot m$ Unbekannten $x_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Also existiert eine Darstellung von (3.1) in der üblichen Form $Mx = w$ eines linearen Gleichungssystems in $\mathbb{R}^{mn}$. Mit Hilfe dieser Darstellung können wir sofort Aussagen über die (eindeutige) Lösbarkeit von Sylvestergleichungen erhalten. Dazu benötigen wir ein Kalkül, welches auf der folgenden Definition beruht.

**Definition 3.1** *Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Dann ist das* Kroneckerprodukt (Tensorprodukt) *von $A$ und $B$ definiert durch*

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1,p}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,p}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm\times pq}.$$

*Außerdem wird der* vec-*Operator definiert durch*

$$\mathrm{vec} : \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{n\cdot p} \ : \ A \to [a_{11}, \dots, a_{n,1}, a_{12}, \dots, a_{n,2}, \dots, a_{n,p}]^T .$$

Folgende Eigenschaften des Kroneckerprodukts ergeben sich direkt aus der Definition 3.1:

a) $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

b) $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$,

b) $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$,

d) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$,

e) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$,

f) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$,

g) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, falls $A$ und $B$ invertierbar sind.

Eine weitere wichtige Eigenschaft verbindet Kroneckerprodukt und den vec-Operator, mit dieser Eigenschaft lassen sich dann Sylvestergleichungen “vektorisieren”.

**Lemma 3.2** *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt:*

$$\mathrm{vec}\,(AXB) = (B^T \otimes A)\,\mathrm{vec}\,(X)\,.$$

**Beweis:** Übung. □

Damit erhält man sofort die gewünschte vektorisierte Darstellung der Sylvestergleichung (3.1).

**Folgerung 3.3** *Die Sylvestergleichung (3.1) ist äquivalent zu*

$$\big((I_m \otimes A) + \big(B^T \otimes I_n\big)\big) \operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec}(W), \tag{3.2}$$

*d.h. X löst (3.1) genau dann, wenn* $\operatorname{vec}(X)$ *(3.2) löst.*

Definiert man $M := (I_m \otimes A) + \big(B^T \otimes I_n\big)$ ist daher sofort klar, daß die Sylvestergleichung genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn $M$ regulär ist. Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür ist bekanntermaßen, daß $M$ keinen Eigenwert $\lambda = 0$ hat. Da man mit Hilfe des Kroneckerprodukt-Kalküls die Eigenwerte von $M$ explizit angeben kann, erhält man das gewünschte Ergebnis über die Lösbarkeit der Sylvestergleichung (3.1).

**Satz 3.4** *Betrachte die Sylvestergleichung (3.1) und sei* $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\Lambda(B) = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. *Dann:*

*a)* $\Lambda(M) = \Lambda((I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)) = \{\lambda_j + \mu_k,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m\}$.

*b) Die Sylvestergleichung (3.1) und damit das lineare Gleichungssystem (3.2) haben eine eindeutige Lösung genau dann, wenn* $\Lambda(A) \cap \Lambda(-B) = \emptyset$.

**Beweis:** a) Übung.
b) $0 \in \Lambda(M) \iff$ Es existiert $\lambda_j \in \Lambda(A)$ und $\mu_k \in \Lambda(B)$ mit $\lambda_j = -\mu_k$ .
$\iff \Lambda(A) \cap \Lambda(B) \neq \emptyset$. □

Betrachte nun den Spezialfall von (3.1) mit $m = n$, $B = A^T$ und $W = W^T$. Damit erhält man die *Lyapunovgleichung*

$$AX + XA^T = W. \tag{3.3}$$

Da die Lyapunovgleichung symmetrisch ist, folgt sofort daß auch $X^T$ Lösung von (3.3) ist. Falls die Lösung eindeutig ist, d.h. nach Satz 3.4b), falls $\Lambda(A) \cap \Lambda(-A) = \emptyset$, dann ist diese eindeutige Lösung symmetrisch. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der eindeutigen Lösbarkeit ist, daß $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$, also, daß $A$ stabil[1] ist. Man erhält in diesem Fall sogar eine explizite Lösungsformel, die auch allgemeiner für (3.1) gültig ist, falls $A$ und $B$ stabil sind.

**Satz 3.5** *Sind* $\Lambda(A), \Lambda(B) \subset \mathbb{C}^-$, *dann hat (3.1) eine eindeutige Lösung, die durch*

$$X = -\int_0^\infty e^{At} W e^{Bt}\, dt \tag{3.4}$$

*gegeben ist.*

[1] Genauer müßte man sagen, $A$ ist *asymptotisch* stabil. Allerdings ist der Begriff "stabil" für Matrizen mit Spektrum in der offenen linken Halbebene gebräuchlich in der Matrixtheorie und wird deshalb auch im Folgenden derart verwendete.

**Beweis:** Die Eindeutigkeit der Lösung folgt sofort aus Satz 3.4b).

Definiere nun $Z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times m}$ als Lösung der linearen matrixwertigen Differentialgleichung

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B \tag{3.5}$$

für die Anfangsbedingung $Z(0) = W$. Aus der Theorie linearer homogener Differentialgleichungen folgt, daß diese Anfangswertaufgabe für die "Sylvester-Differentialgleichung" (3.5) eine eindeutige Lösung auf ganz $[0, \infty)$ besitzt. Diese Lösung ist $Z(t) = e^{At}We^{Bt}$, wie man leicht nachrechnet: $Z(0) = W$ und

$$\dot{Z}(t) = Ae^{At}We^{Bt} + e^{At}WBe^{Bt} = Ae^{At}We^{Bt} + e^{At}We^{Bt}B = AZ(t) + Z(t)B,$$

wobei man verwendet, daß $B$ und $e^{Bt}$ kommutieren. Da $A, B$ stabil sind, gilt $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{Bt} = 0$ und damit

$$Z_\infty := \lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At}We^{Bt} = 0.$$

Integration von (3.5) über $[0, \infty)$ liefert

$$Z_\infty - Z(0) = A\int_0^\infty Z(t)\,dt + \int_0^\infty Z(t)\,dtB,$$

also

$$A\int_0^\infty Z(t)\,dt + \int_0^\infty Z(t)\,dtB = -W.$$

Damit ist $-\int_0^\infty Z(t)\,dt$ eine Lösung der Sylvestergleichung (3.1). Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt dann $X = -\int_0^\infty Z(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{At}We^{Bt}\,dt.$ □

Betrachtet man nun ein asymptotisch stabiles LTI System $\dot{x} = Ax + Bu$ und setzt $W = -BB^T$ in (3.3), dann erhält man aus Satz 3.5 sofort, daß die Steuerbarkeits-Gram'sche Matrix

$$P = \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,dt$$

die eindeutige Lösung der *stabilen Lyapunovgleichung*

$$AP + PA + BB^T = 0 \tag{3.6}$$

ist. Daraus ergibt sich ein weiteres Kriterium für die Steuerbarkeit von LTI Systemen.

**Folgerung 3.6** *Sei $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$. Dann ist das durch $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ definierte LTI System steuerbar genau dann, wenn die eindeutige Lösung der Lyapunovgleichung (3.6) positiv definit ist.*

Analog erhält man eine Charakterisierung der Beobachtbarkeit für asymptotisch stabile LTI Systeme über die positive Definitheit der Lösung von

$$A^TQ + QA + C^TC = 0.$$

Im Folgenden zitieren wir die beiden grundlegenden Sätze aus der Lyapunov'schen Stabilitätstheorie, die im weiteren benötigt werden.

**Satz 3.7** ***(Satz von Lyapunov, 1897)*** *Seien $A, W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $W = W^T$ negativ definit. Dann gilt:*

*a) Ist $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$, dann hat die Lyapunovgleichung (3.3) eine eindeutige Lösung $X$. Außerdem gilt $X = X^T > 0$.*

*b) Falls (3.3) eine Lösung $X > 0$ hat, dann ist $A$ stabil.*

**Beweis:** Teil a) folgt aus Satz 3.5. Für Teil b) siehe z.B. [2, 4, 5]. □

Aus Satz 3.7b) folgt ein Test auf asymptotische Stabilität bei linearen dynamischen Systemen, den man als *direkte Methode nach Lyapunov*[2] bezeichnet. Dazu löst man die Lyapunovgleichung $AX+XA^T = -\alpha I_n$ für ein $\alpha < 0$. Ist $X > 0$ (was man z.B. mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung von $X$ überprüfen kann), so sind alle Lösungen von $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil. Daher bezeichnet man asymptotische Stabilität auch als *Lyapunov-Stabilität*. Wie bereits oben erwähnt, erhält man auch für nichtlineare Systeme eine hinreichende Bedingung mittels Lyapunov'scher Stabilitätstheorie, indem man eine Lyapunovfunktion für $\dot{x} = f(x)$ angibt. (Im linearen Fall ist eine solche Lyapunovfunktion durch $V(x) = x^T Xx$ gegeben.) Allerdings ist die Bestimmung einer Lyapunovfunktion für nichtlineare Systeme oft sehr schwierig und i.a. nicht durch einen einfachen Algorithmus möglich.

In der Regelungs- und Systemtheorie ist die folgende Version von Satz 3.7 wesentlich, die auf Chen (1973) und Wimmer (1974) zurückgeht und bei der die Definitheit der rechten Seite der Lyapunovgleichung abgeschwächt werden kann unter der zusätzlichen Annahme der Steuerbarkeit.

**Satz 3.8** *Es sei das durch $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ definierte LTI System steuerbar.*

*a) Ist $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$, dann hat die Lyapunovgleichung (3.6) eine eindeutige Lösung $P$. Außerdem gilt $P = P^T > 0$.*

*b) Falls (3.6) eine Lösung $P > 0$ hat, dann ist $A$ stabil.*

**Beweis:** Teil a) ist nichts anderes als Folgerung 3.6. Für Teil b) siehe z.B. [5, Chapter 13]. □

## 3.2 Stabilisierung mit Lyapunovgleichungen

Der folgende Satz, der auf Kleinman (1970) und Armstrong (1975) zurückgeht und frühere Ideen von Bass aufgreift, liefert ein erstes Stabilisierungsverfahren. Im Folgenden bezeichnet $M^+$ die *(Moore-Penrose) Pseudoinverse* von $M$, d.h. die eindeutige Matrix, für die die *Moore-Penrose Bedingungen*

$$\begin{array}{llll} (i) & MM^+M = M, & (ii) & M^+MM^+ = M^+, \\ (iii) & (MM^+)^T = MM^+, & (iv) & (M^+M)^T = M^+M \end{array}$$

erfüllt sind.

[2]Der Name "direkte Methode" bezieht sich darauf, daß keine Lösungstrajektorie berechnet werden muß, um Stabilität zu überprüfen.

**Satz 3.9** *Es sei* $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ *stabilisierbar und* $\beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\beta > \rho(A)$, *wobei* $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \Lambda(A)\}$ *der Spektralradius von* $A$ *ist. Ist* $X$ *die eindeutige Lösung der Lyapunovgleichung*

$$(A + \beta I_n)X + X(A + \beta I_n)^T = 2BB^T, \tag{3.7}$$

*dann ist* $F := -B^T Z^+$ *eine stabilisierende Feedback-Matrix für* $(A, B)$.

**Beweis:** Sei zunächst $(A, B)$ steuerbar (und damit natürlich auch stabilisierbar). Da $\beta > \rho(A)$ gilt $\Lambda(A + \beta I_n) \subset \mathbb{C}^+$. Um Satz 3.8a) anwenden zu können, muß $(-(A + \beta I_n), \sqrt{2}B)$ steuerbar sein. Dies folgt aber sofort mit dem Hautus-Test, da

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{Rang}([\,A - \lambda I_n,\ B\,]) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \\ &\Longleftrightarrow \\ n &= \operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} (A + \beta I_n) + \tilde{\lambda} I_n, & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{2} I_m \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} -(A + \beta I_n) - \tilde{\lambda} I_n, & \sqrt{2}B \end{bmatrix}\right) \quad \forall\, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Also folgt mit Satz 3.8b), daß (3.7) eine eindeutige Lösung $X > 0$ besitzt. Da $X$ invertierbar ist, ergibt sich die Äquivalenz von (3.7) und

$$X^{-1}(A + \beta I_n) + (A + \beta I_n)^T X^{-1} = 2X^{-1}BB^T X^{-1}.$$

Durch Umstellen erhält man daraus

$$X^{-1}(A - BB^T X^{-1}) + (A - BB^T X^{-1})^T X^{-1} = -2\beta X^{-1}.$$

Da $X$ und damit $X^{-1}$ positiv definit sind, ist die rechte Seite dieser Lyapunovgleichung negativ definit. Damit folgt aus Satz 3.7b), daß $A - BB^T X^{-1}$ stabil ist, d.h. $F = -B^T X^+$ ist eine stabilisierende Feedback-Matrix, da für invertierbare Matrizen $X^+ = X^{-1}$.

Sei nun $(A, B)$ stabilisierbar. Aufgrund von Satz 3.5 wissen wir, daß (3.7) eine eindeutige Lösung besitzt, die aufgrund der Darstellung (3.4) positiv semidefinit sein muß. Weiterhin wissen wir aus Satz 2.10, daß $(A, B)$ eine Kalman-Zerlegung der Form

$$A = V \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} V^T, \quad B = V \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A_1, B_1) \text{ steuerbar, } A_3 \text{ stabil}$$

mit $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal besitzt. Multipliziert man (3.7) von links mit $V^T$, von rechts mit $V$, setzt $\hat{X} = V^T X V = \left[\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{smallmatrix}\right]$ und partitioniert analog zur Aufteilung in der Kalman-Zerlegung, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} A_1{+}\beta I & A_2 \\ 0 & A_3{+}\beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1{+}\beta I)^T & 0 \\ A_2^T & (A_3{+}\beta I)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhält man die folgenden linearen Matrixgleichungen

$$(A_1 + \beta I)X_1 + X_1(A_1 + \beta I)^T + A_2 X_2^T + X_2 A_2^T = 2B_1 B_1^T \tag{3.8}$$

$$(A_3 + \beta I)X_3 + X_3(A_3 + \beta I)^T = 0. \tag{3.9}$$

Die homogene Gleichung (3.9) hat wegen Satz 3.4b) die eindeutige Lösung $X_3 = 0$. Da $X$ und damit auch $\hat{X}$ positiv semidefinit ist, muß $X_2 = 0$ gelten. Aus der Steuerbarkeit von $(A_1, B_1)$ folgt, daß (3.8) eine eindeutige Lösung $X_1 > 0$ besitzt und $F_1 = -B_1^T X_1^{-1}$ eine stabilisierende Feedback-Matrix für $(A_1, B_1)$ ist. Setzt man $F := \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix} V^T$, so gilt

$$V^T(A + BF)V = \begin{bmatrix} A_1 + B_1F_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

d.h. $\Lambda(A + BF) = \Lambda(A_1 + B_1F_1) \cup \Lambda(A_3) \subset \mathbb{C}^-$. Also ist $F$ eine stabilisierende Feedback-Matrix für $(A, B)$. Außerdem gilt

$$F = \begin{bmatrix} -B_1^T X_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} V^T = -\begin{bmatrix} B_1^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T = -B^T V \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T.$$

Durch Nachrechnen überzeugt man sich, daß $V \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$ die Moore-Penrose Bedingungen bzgl. $X = V \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$ erfüllt. Damit gilt also letztlich, daß $F = -B^T X^+$. $\square$

Der obige Beweis verwendet im Wesentlichen, daß die nicht-steuerbaren Moden des LTI Systems nicht stabilisiert werden müssen, so daß das Stabilisierungsproblem auf den steuerbaren Fall zurückgeführt werden kann. Damit erhält man einen vollständigen Beweis von Satz 2.10, da Satz 3.9 den Schritt "c) $\Rightarrow$ b)" liefert unter der Voraussetzung, daß "a) $\Rightarrow$ c)" bewiesen ist.

**Algorithmus 3.10 (Bass Algorithmus)**

INPUT: $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ stabilisierbar.
OUTPUT: Stabilisierende Feedback-Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, d.h., $\Lambda(A + BF) \subset \mathbb{C}^-$.
1: Setze $\beta = 2\|A\|_p$ für eine einfach zu berechnende Norm, z.B. $p = 1, \infty, F$.
2: Löse (3.7).
3: Berechne $Z^+$ und setze $F = -B^T Z^+$.

Der Faktor 2 in Zeile 1 ist ein Sicherheitsfaktor, der bewirken soll, daß die Eigenwerte von $A + \beta I_n$ hinreichend weit von der imaginären Achse entfernt sind. Die Berechnung der Pseudoinversen $Z^+$ kann z.B. mit Hilfe einer Eigenwertzerlegung der positiv semidefiniten Matrix $Z$ erfolgen.

## 3.3 Numerische Lösung von Lyapunovgleichungen

Die Lösung des zur Lyapunovgleichung nach Folgerung 3.3 äquivalenten linearen Gleichungssystems

$$((A \otimes I_n) + (I_n \otimes A)) \operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec}(W) \tag{3.10}$$

mit dem Gauß'schen Elimininationsverfahren würde $\frac{2}{3}(n^2)^3 = \frac{2}{3}n^6$ Flops kosten und auf einen Speicherbedarf für $n^4$ reelle Zahlen hinauslaufen. Dies ist bereits für $n = 100$ nicht mehr vertretbar. (Es würden bereits mehr als 800MB Hauptspeicher benötigt!) Unser Ziel ist es, einen Algorithmus mit Rechenaufwand $\mathcal{O}(n^3)$ und Speicherbedarf $\mathcal{O}(n^2)$ zu entwickeln. Dies gelingt, da (3.10) ein Gleichungssystem mit sehr spezieller Struktur in $\mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ ist und durch $\mathcal{O}(n^2)$ Daten definiert ist.

Die Idee ist, die Lyapunovgleichung (3.3) in eine Gestalt zu transformieren, so daß das Gleichungssystem (3.10) durch einfaches Rückwärtseinsetzen mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(n^3)$ gelöst werden kann.

Dazu verwenden wir ein Ergebnis aus der numerischen linearen Algebra.

**Satz 3.11 (Reelle Schur-Zerlegung)** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann existiert $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, so daß*

$$A = QTQ^T, \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1,r} \\ & \ddots & \vdots \\ & & T_{rr} \end{bmatrix} \text{ mit } T_{jj} \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}, n_j \in \{1, 2\}, \quad \sum_{j=1}^{r} n_j = n, \tag{3.11}$$

*wobei für $n_j = 1$, $T_{jj}$ ein reeller Eigenwert von $A$ ist und für $n_j = 2$ sind die Eigenwerte von $T_{jj}$ ein komplex-konjugiertes Eigenwertpaar von $A$.*

*Außerdem kann $Q$ so gewählt werden, daß die Eigenwerte von $A$ in beliebiger Reihenfolge auf der Diagonale von $T$ erscheinen.*

**Beweis:** Siehe z.B. [1, 8]. □

Die Zerlegung von $A$ in (3.11) heißt *Schur-Zerlegung* von $A$, $T$ heißt dann *Schurform* von $A$ und die Spalten von $Q$ sind die *Schurvektoren* von $A$. Beachte, daß die ersten $n_1 + \ldots + n_k$ Spalten von $Q$ einen $A$-invarianten Unterraum bilden für alle $k = 1, \ldots, r$. Die Schur-Zerlegung von $A$ kann z.B. mit dem QR Algorithmus numerisch rückwärts stabil berechnet werden, siehe z.B. [1, 8].

Multipliziert man die Lyapunovgleichung (3.3) von rechts mit der Schurvektor-Matrix $Q$ von $A$ und von links mit $Q^T$, so ergibt sich die äquivalente Lyapunovgleichung

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix}$$

mit $A_3 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$. Unter Ausnutzung der Symmetrie zerfällt diese Lyapunovgleichung in die folgenden drei linearen Matrixgleichungen:

$$A_1X_1 + X_1A_1^T = W_1 - A_2X_2^T - X_2A_2^T =: \tilde{W}_1 = \tilde{W}_1^T, \tag{3.12}$$

$$A_1X_2 + X_2A_3^T = W_2 - A_2X_3 =: \tilde{W}_2, \tag{3.13}$$

$$A_3X_3 + X_3A_3^T = W_3. \tag{3.14}$$

Die Gleichung (3.14) kann nun explizit aufgelöst werden. Falls $n_r = 1$, dann ist (3.14) skalar und

$$X_3 = \frac{W_3}{2A_3},$$

da $A_3 \neq 0$ (andernfalls wäre die Lyapunovgleichung nicht eindeutig lösbar). Im Fall $n_r = 2$ verwendet man explizit die vektorisierte Darstellung von (3.14). Unter Ausnutzung der Symmetrien ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} & 0 \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} + a_{n,n} & a_{n,n-1} \\ 0 & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1,n-1} \\ x_{n-1,n} \\ x_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{n-1,n-1}/2 \\ w_{n-1,n} \\ w_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Die Lösung von (3.15) sollte mit einer LU Zerlegung mit vollständiger Pivotisierung erfolgen, um möglichst hohe Genauigkeit zu erzielen.

Die Lösung $X_3$ wird nun in (3.13) eingesetzt. Damit ergibt sich eine Sylvestergleichung, die eindeutig lösbar ist (wegen Satz 3.4 und $\Lambda(A_1) \cap \Lambda(-A_3^T) = \emptyset$, falls $\Lambda(A) \cap \Lambda(-A^T) = \emptyset$). Aufgrund der sehr speziellen Struktur dieser Sylvestergleichung kann man diese Lösung einfach durch Rückwärtseinsetzen berechnen. Partitioniere dazu analog zu (3.11),

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,r-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{r-1,r-1} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W}_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{r-1} \end{bmatrix}, \quad x_j, w_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_r}.$$

Dann kann man die $x_j$ rückwärts berechnen aus

$$A_{jj}x_j + x_j A_3^T = w_j - \sum_{i=j+1}^{r-1} A_{j,i}x_i =: \tilde{w}_j, \qquad j = r-1, r-2, \dots, 1.$$

Bei der Lösung dieser Gleichung muß man vier Fälle unterscheiden.

**$n_j = 1, n_r = 1$:** Die Gleichung ist skalar und $x_j = \frac{\tilde{w}_j}{A_{jj}+A_3}$.

**$n_j = 2, n_r = 1$:** Man erhält ein Gleichungssystem im $\mathbb{R}^2$ mit eindeutiger Lösung,

$$(A_{jj} + A_3 \cdot I_2)x_j = \tilde{w}_j.$$

**$n_j = 1, n_r = 2$:** Man erhält ein Gleichungssystem im $\mathbb{R}^2$ mit eindeutiger Lösung,

$$(A_{jj} \cdot I_2 + A_3)x_j^T = \tilde{w}_j^T.$$

**$n_j = 2, n_r = 2$:** Man erhält ein Gleichungssystem im $\mathbb{R}^4$ mit eindeutiger Lösung,

$$\big((I_2 \otimes A_{jj}) + (A_3^T \otimes I_2)\big)\,\mathrm{vec}\,(x_j) = \mathrm{vec}\,(\tilde{w}_j)\,.$$

Die Gleichungssysteme in den letzten drei Fällen werden mit LU Zerlegung und vollständiger Pivotisierung gelöst.

Setzt man nun die so berechnete Lösung von (3.13) in (3.12), so erhält man eine Lyapunovgleichung in $\mathbb{R}^{n-n_r \times n-n_r}$ mit Koeffizientenmatrix in Schurform. Damit läßt sich diese

**Algorithmus 3.12 (Bartels-Stewart Algorithmus (1972))**

INPUT: $A, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W = W^T$.

OUTPUT: Lösung $X = X^T$ der Lyapunovgleichung (3.3).

1: Berechne die reelle Schurform von $A$ wie in (3.11) mit Hilfe des QR Algorithmus.
2: **if** $\Lambda(A) \cap \Lambda(-A) \neq \emptyset$ **then**
3: STOP; keine eindeutige Lösung.
4: **end if**
5: $\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix} := Q^T W Q$, $W_3 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$.
6: $k := r$
7: **while** $k > 1$ **do**
8: Löse (3.14) mit $A_3 = A_{kk}$.
9: Löse (3.13) mit $A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$.
10: $W_1 := W_1 - A_2 X_2^T - X_2 A_2^T$.
11: $k := k - 1$
12: **end while**
13: Löse (3.12) als lineares Gleichungssystem (unter Ausnutzung der Symmetrie) im $\mathbb{R}^3$.
14: $X := Q\tilde{X}Q^T$

Gleichung wieder aufteilen wie in (3.12)–(3.14), so daß sich das oben beschriebene Vorgehen rekursiv anwenden läßt bis (3.12) eine Gleichung im $\mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ist, die direkt aufgelöst werden kann.

Zum Schluß muß man noch die berechnete Lösung in das ursprüngliche Koordinatensystem zurücktransformieren. Damit erhält man insgesamt den Algorithmus 3.12.

Der Bartels-Stewart Algorithmus benötigt ca. $32n^3$ elementare Rechenoperationen, dabei entfallen auf den QR Algorithmus ca. $25n^3$ Flops und auf die Schritte 5 und 14 je $3n^3$. Der gesamte Prozeß des Rückwärtseinsetzens (die **while**-Schleife) benötigt nur $n^3$ Operationen. Da sowohl der QR Algorithmus als auch das Rückwärtseinsetzen numerisch rückwärts stabil sind und darüberhinaus nur orthogonale Ähnlichkeitstransformationen verwendet werden, kann der Bartels-Stewart Algorithmus als numerisch rückwärts stabil angesehen werden.

Der Bartels-Stewart Algorithmus zur Lösung von Lyapunovgleichungen ist z.B. in der Matlab Control Toolbox Funktion `lyap` implementiert.

## 3.4 Stabilisierung durch Polvorgabe

Zunächst werden wir zeigen, daß ein System steuerbar genau dann ist, wenn es zu jeder Menge $\mathcal{L} := \{\mu_1, \dots \mu_n\} \subset \mathbb{C}$, die abgeschlossen bzgl. komplexer Konjugation ist, eine

Feedback-Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\Lambda\,(A+BF) = \mathcal{L}$ gibt. Dazu führen wir zunächst zwei Normalformen für Single-Input Systeme ein, die weitere Charakterisierungen der Steuerbarkeit erlauben. Man beachte, daß sich diese Normalformen nicht numerisch stabil berechnen lassen und daher eher von theoretischem Interesse sind.

Im Folgenden sei

$$\phi_A(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{3.16}$$

das charakteristische Polynom von $A$. Desweiteren sagen wir, daß $(A, B)$ und $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ähnlich sind, wenn $(\tilde{A}, \tilde{B})$ durch einen Basiswechsel im Zustandsraum gemäß Definition 2.17 aus $(A, B)$ hervorgeht, d.h. falls eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, so daß $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (TAT^{-1}, TB)$.

**Lemma 3.13** *Es sei* $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times 1}$ *und*

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

*Dann gilt*

$$A\mathcal{K}(A, B) = \mathcal{K}(A, B)A_s, \quad B = \mathcal{K}(A, B)B_s, \tag{3.18}$$

*wobei* $\mathcal{K}(A, B)$ *die Steuerbarkeitsmatrix von* $(A, B)$ *ist. Insbesondere ist* $(A, B)$ *steuerbar genau dann wenn* $(A, B)$ *und* $(A_s, B_s)$ *ähnlich sind.*

**Beweis:** Mit dem Satz von Cayley-Hamilton folgt (siehe auch Beweis von Satz 2.8)

$$A^n = -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} A\mathcal{K}(A, B) &= \begin{bmatrix} AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B & -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j B \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{K}(A, B)A_s. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung in (3.18) ist sofort klar.

Nun ist $(A_s, B_s)$ in System-Hessenberg-Form mit $A_s$ unreduziert und damit ist $(A_s, B_s)$ steuerbar nach Folgerung 2.22. Ist $(A_s, B_s)$ ähnlich zu $(A, B)$, dann ist $(A, B)$ steuerbar nach Satz 2.18a). Ist andererseits $(A, B)$ steuerbar, dann ist $\mathcal{K}(A, B)$ regulär nach Satz 2.9 und somit sind wegen (3.18) $(A, B)$ und $(A_s, B_s)$ ähnlich mit $T := \mathcal{K}(A, B)^{-1}$. $\square$

**Definition 3.14** *Die* Regler-Normalform *eines Paares* $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ist gegeben durch*

$$A_{RNF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_{RNF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Man beachte, daß nicht jedes Paar $(A,B)$ ähnlich zu seiner Regler-Normalform ist, wie der nächste Satz zeigt.

**Satz 3.15** $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ist steuerbar genau dann, wenn es eine reguläre Matrix* $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt, so daß* $(A_{RNF}, B_{RNF}) = (SAS^{-1}, SB)$.

**Beweis:** Zunächst beachte, daß $\phi_A$ das charakteristische Polynom von $(A_{RNF}, B_{RNF})$ ist. (Entwickle $\det(A_{RNF} - \lambda I_n)$ nach der letzten Zeile!) Damit gilt nach Lemma 3.13 bzw. (3.17)

$$A_{RNF}\mathcal{K}(A_{RNF}, B_{RNF}) = \mathcal{K}(A_{RNF}, B_{RNF})A_s, \quad B_{RNF} = \mathcal{K}(A_{RNF}, B_{RNF})B_s.$$

Nun ist $\mathcal{K}(A_{RNF}, B_{RNF}) = \begin{bmatrix} e_n & e_{n-1} & \dots & e_1 \end{bmatrix}$ und damit invertierbar. Also ist $(A_{RNF}, B_{RNF})$ ähnlich zu $(A_s, B_s)$. Damit folgt die Behauptung mit Lemma 3.13. □

Desweiteren werden wir noch eine Eigenschaft des Teilraums Bild $(\mathcal{K}(A,B))$ benötigen.

**Lemma 3.16** *Sei* $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $b_j = Be_j$, $j = 1, \dots, m$. *Dann gilt*

$$\text{Bild}\,(\mathcal{K}(A,B)) = \text{span}\{A^k b_j \mid k \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, m\} =: \mathcal{K}.$$

*D.h.,* Bild $(\mathcal{K}(A,B))$ *ist der kleinste A-invariante Unterraum der* Bild $(B)$ *enthält.*

**Beweis:** Die Aussage folgt mit dem Satz von Cayley-Hamilton wie im Beweis von Satz 2.8, da

$$A^{n+\nu} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(\nu)} A^j \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Da jeder $A$-invariante Unterraum, der Bild $(B)$ enthält, auch $\mathcal{K}$ enthalten muß, ergibt sich die Interpretation von Bild $(\mathcal{K}(A,B))$ als kleinster $A$-invarianter Unterraum der Bild $(B)$ enthält. □

Beachtet man noch, daß für ähnliche Matrixpaare $(A,B)$ und $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (TAT^{-1}, TB)$ gilt $\Lambda\,(A + BF) = \Lambda\,(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}) = \mathcal{L}$ für $\tilde{F} = FT^{-1}$, so haben wir nun die notwendigen Vorarbeiten geleistet, um den Satz von der Polvorgabe zu beweisen. Der Beweis folgt im Wesentlichen dem Beweis von Theorem 13 in [7].

**Satz 3.17 (Polvorgabe)** *Es sei* $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ *und die unsteuerbaren Moden von* $(A, B)$ *seien* $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$. *Dann existiert eine Feedback-Matrix* $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *so, daß* $\Lambda(A+BF) = \mathcal{L}$ *genau dann, wenn* $\mathcal{L} = \{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$, *wobei* $\{\mu_1, \dots, \mu_k\} \subset \mathbb{C}$ *beliebig gewählt werden kann, solange* $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ *abgeschlossen unter komplexer Konjugation ist. Im Fall* $m = 1$ *ist* $F$ *eindeutig.*

*Insbesondere ist* $(A, B)$ *steuerbar genau dann, wenn es für jede Menge* $\mathcal{L} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ *mit* $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ *ein* $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mit* $\Lambda(A + BF) = \mathcal{L}$ *gibt.*

**Beweis:** Sei zunächst $(A, B)$ nicht steuerbar. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $(A, B)$ in Kalman-Form vorliegt, d.h.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A_1, B_1) \text{ steuerbar},$$

wobei $A_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}$ usw. Für ein beliebiges $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$ gilt also

$$\Lambda(A + BF) = \Lambda(A_1 + B_1F_1) \cup \Lambda(A_3) = \Lambda(A_1 + B_1F_1) \cup \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

Da $\Lambda(A_3)$ die unkontrollierbaren Moden sind, ist klar, daß $\mathcal{L}$ die im Satz angegebene Form annehmen muß und daß $(A, B)$ steuerbar ist, wenn $\mathcal{L}$ beliebig gewählt werden kann.

Es bleibt jetzt zu zeigen, daß $\Lambda(A_1 + B_1F_1)$ beliebig gewählt werden kann durch Wahl eines geeigneten $F$. Kann man für eine vorgegebene Menge $\mathcal{L}_1 := \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ ein $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times k}$ finden mit $\Lambda(A_1 + B_1F_1) = \mathcal{L}_1$, dann liefert $F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix}$ das Gewünschte.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir uns also auf den Fall, daß $(A, B)$ steuerbar ist, zurückziehen. Im Fall $m = 1$ können wir wegen Satz 3.15 davon ausgehen, daß $(A, B)$ in Regler-Normalform vorliegt. Dann sieht man sofort, daß mit $F = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{bmatrix}$, $f_j \in \mathbb{R}$

$$A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 + f_1 & -\alpha_1 + f_2 & -\alpha_2 + f_3 & \dots & -\alpha_{n-1} + f_n \end{bmatrix}.$$

Da

$$\phi_{A+BF}(x) = x^n + (\alpha_{n-1} - f_n)x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - f_2)x + (\alpha_0 - f_1),$$

ist $f$ eindeutig festgelegt durch $f_j = -\beta_{j-1}$, wobei

$$(x - \mu_1)\cdots(x - \mu_n) =: x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Sei nun $m$ beliebig. Wir werden dies auf den Fall $m = 1$ zurückführen. Dazu sei $v \in \mathbb{R}^m$ mit $b := Bv \neq 0$. Wir zeigen nun, daß ein $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert, so daß $(A+BG, b)$ steuerbar ist. Ist dann $f \in \mathbb{R}^{1\times n}$ der eindeutig bestimmte Vektor so daß $\Lambda(A + BG + bf) = \mathcal{L}$, dann ist $F := G + vf$ die gesuchte Feedback-Matrix.

Es bleibt also die Existenz von $G$ zu zeigen. Definiere nun eine maximale Menge linear unabhängiger Vektoren $\mathcal{R} = \{x_1, \ldots, x_\ell\} \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &:= b = Bv, \\ x_j - Ax_{j-1} &\in \text{Bild}\,(B), \end{aligned} \tag{3.20}$$

wobei wir vereinbaren, daß $x_0 = 0$. Es ist klar, daß $\mathcal{R} \neq \emptyset$, da $b \in \mathcal{R}$ und $\dim \text{span}\mathcal{R} = \ell \leq n$ und damit "$\ell$ maximal" wohldefiniert ist.

Wir zeigen jetzt, daß $\ell = n$. Da $\ell$ maximal gewählt ist, folgt

$$Ax_\ell + Bu \in \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^m. \tag{3.21}$$

(Sonst erhält man mit $x_{\ell+1} := Ax_\ell + Bu$ eine größere Menge, die die Bedingungen erfüllt, was der Maximalität von $\ell$ widerspricht.)

Insbesondere ergibt sich mit $u = 0$, daß

$$Ax_\ell \in \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^m.$$

Damit folgt aus (3.21)

$$\text{Bild}\,(B) \subset \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\} - Ax_\ell \subset \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\}$$

und mit (3.20)

$$Ax_k \in \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\}, \; k = 1, \ldots, \ell.$$

Damit ist $\text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ ein $A$-invarianter Unterraum, der $\text{Bild}\,(B)$ enthält. Nun ist aber nach Lemma 3.16 $\text{Bild}\,(\mathcal{K}(A, B))$ der kleinste Teilraum von $\mathbb{R}^n$, der diese Eigenschaft erfüllt. Also gilt $\text{Bild}\,(\mathcal{K}(A, B)) \subset \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\}$. Da $(A, B)$ steuerbar ist, folgt $\dim \text{Bild}\,(\mathcal{K}(A, B)) = n$ und damit $\dim \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_\ell\} = \ell = n$.

Sei nun $u_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 1, \ldots, n-1$ eine Folge von Vektoren, die $\mathcal{R}$ wie in (3.21) erzeugt, d.h.

$$x_k - Ax_{k-1} = Bu_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Definiere damit die Matrix $G$ über

$$Gx_k := u_k, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

und wähle $Gx_n = u_n$ beliebig. Beachte, daß die Zeilen $g_j^r$ von $G$, $j = 1, \ldots, m$, das lineare Gleichungssystem

$$Xg_j^r = u_j^r$$

erfüllen, wobei $u_j^r$ die Zeilen der Matrix $[u_1, \ldots, u_n]$ sind und

$$X = [\, x_1, \, \ldots, \, x_n \,]^T$$

regulär ist. Damit ist $G$ durch diese Wahl eindeutig bestimmt.

Weiterhin gilt nach Wahl von $G$ und (3.20)

$$\mathcal{K}(A+BG,b)=\left[\begin{array}{ccc} x_1 & \dots & x_n \end{array}\right].$$

Also ist $(A+BG,b)$ steuerbar und die Behauptung gezeigt. □

Der Beweis von Satz 3.15 motiviert den Begriff *Regler-Normalform*, da die den Regler bestimmende Matrix $F$ im Fall $m=1$ direkt aus $A_{RNF}$ abgelesen werden kann.

**Bemerkung 3.18** *Bei der Berechnung der Feedback-Matrix $F$ muß man im Fall $m>1$ die Eindeutigkeit durch Zusatzbedingungen erzwingen. Diese Freiheit sollte man ausnutzen, die Pole des rückgekoppelten Systems so robust wie möglich gegenüber Störungen zu machen. Ein für die numerische Rechnung geeignetes Kriterium ist, $F$ so zu wählen, daß $A+BF$ diagonalisierbar und die Eigenvektormatrix $X=X(F)$ minimale Kondition hat. Es ergibt sich das Minimierungsproblem*

$$\begin{aligned}
&\min_{F\in\mathbb{R}^{m\times n}} \operatorname{cond}(X(F)) \\
&\textit{so daß } (A+BF)X(F)=X(F)\begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

*Das Problem der robusten Polvorgabe wurde 1985 von Kautsky, Nichols und Van Dooren formuliert und gelöst [3], wobei neben obigem Kriterium noch drei weitere untersucht werden, mit deren Hilfe die Sensitivität der Pole gegenüber Störungen gemessen werden kann.*

Hier wollen wir nur einen Algorithmus für den Fall $m=1$ besprechen. Da wir von einem steuerbaren System ausgehen, können wir nach Folgerung 2.22 annehmen, daß $(A,B)$ in System-Hessenbergform vorliegt und $A$ unreduzierte Hessenberg-Matrix ist.

Der Algorithmus geht auf Miminis und Paige (1982) zurück [6] und verwendet im Prinzip den QR Algorithmus zur Berechnung der Eigenwerte einer nicht-symmetrischen Matrix (siehe z.B. [1, Kapitel 7]). Beachte, daß es sich hier um ein *inverses Eigenwertproblem* handelt: Gegeben ist das Spektrum und zu berechnen ist eine Matrix in Hessenbergform mit diesem Spektrum. Anstelle des QR Schritts im QR Algorithmus wird hier ein RQ Schritt verwendet. Die Idee ist dabei die Folgende.

Wir verwenden die $RQ$ Zerlegung einer Matrix $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$M=RQ=\left[\diagdown\right]Q,\qquad Q^TQ=I_n,$$

deren Existenz aus der Existenz der QR Zerlegung folgt. Weiterhin benötigen wir eine Aussage, welche in ähnlicher Form beim QR Algorithmus die Wahl von Shifts motiviert: Ist $\lambda\in\Lambda(M)$, $M$ eine unreduzierte Hessenbergmatrix und $M-\lambda I=RQ$ eine RQ Zerlegung, dann ist $R_{jj}\neq 0$, $j=2,\dots,n$ und $r_{11}=0$. Dies folgt, da $M$ unreduziert ist und deshalb $\operatorname{Rang}(M-\lambda I)\geq n-1$, andererseits $\operatorname{Rang}(M-\lambda I)\leq n-1$ (da $\lambda\in\Lambda(M)$). Da nun

$Q$ obere Hessenberg-Matrix ist und $M$ unreduziert, folgt aus $m_{j,j-1} = r_{jj} q_{j,j-1} \neq 0$, daß $r_{jj} = 0$ für $j = 2, \ldots, n$ und aus der Rangbedingung damit $r_{11} = 0$.

Wählt man nun $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ so, daß in der RQ Zerlegung von

$$A + BF - \mu_1 I = A + \beta e_1 F - \mu_1 I$$

$r_{11} = 0$ gilt, dann folgt

$$QR + \mu_1 I = Q(A + BF - \mu_1 I)Q^T + \mu_1 I = Q(A + BF)Q^T = \begin{bmatrix} \mu_1 & * & \ldots & * \\ & * & \ldots & * \\ & \vdots & & \vdots \\ & * & \ldots & * \end{bmatrix}.$$

Also ist $\mu_1 \in \Lambda\,(A + BF)$.

Die Matrix $F$ läßt sich damit rekursiv berechnen. Es sei

$$A + \beta e_1 F - \mu_1 I = RQ, \qquad Q =: \begin{bmatrix} y^T \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Dann folgt $(A + \beta e_1 F - \mu_1 I)y = 0$ und

$$e_1^T (A - \mu_1 I) y = -\beta F y \tag{3.23}$$

Damit hat man eine Gleichung für die $n$ unbekannten Einträge von $F$. Allerdings kann man $y$ nicht wie in (3.22) berechnen, da $F$ ja noch unbekannt ist. Beachte aber, daß

$$\begin{aligned} A - \mu_1 I &= RQ - \beta e_1 F = RQ - \beta e_1 F Q^T Q \\ &= \underbrace{(R - \beta e_1 F Q^T)}_{=:\tilde{R}} Q. \end{aligned}$$

Es ist also $\tilde{R}Q$ eine RQ Zerlegung von $A - \mu_1 I$ und wir erhalten

$$\tilde{r}_{11} = r_{11} - \beta F y = -\beta F y.$$

Damit können wir die rechte Seite von (3.23) berechnen, ohne $F$ zu kennen.

Da $Q$ aus der RQ Zerlegung von $A - \mu_1 I$ bekannt ist, können wir auch

$$Q(A + \beta e_1 F)Q^T = QR + \mu_1 I = \begin{bmatrix} \mu_1 & * \\ 0 & \tilde{Q}(A + \beta e_1 F)\tilde{Q}^T \end{bmatrix}$$

berechnen, ohne $F$ zu kennen. Setze nun

$$\tilde{A} := \tilde{Q} A \tilde{Q}^T \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}, \quad \tilde{\beta} = e_2^T \beta Q e_1 = q_{21}\beta, \quad \tilde{F} := F\tilde{Q}^T.$$

Aus $q_{21} \neq 0$ (da $A$ unreduziert) folgt $\tilde{\beta} \neq 0$ und damit ist $(\tilde{A}, \tilde{B}) := (\tilde{A}, \tilde{\beta} e_1)$ in System-Hessenbergform, wobei $\tilde{A}$ unreduziert ist. Damit können wir den RQ Schritt mit $(\tilde{A}, \tilde{B})$

**Algorithmus 3.19 (Polvorgabe nach Miminis-Paige (1982))**

INPUT: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{L} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ mit $(A, B)$ steuerbar, $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$.

OUTPUT: Feedback-Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\Lambda\,(A + BF) = \mathcal{L}$.

Berechne die System-Hessenbergform von $(A, B)$, d.h. berechne $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal so, daß

$$A_1 := P^T AP = \left[\diagdown\right], \quad \beta_1 e_1 := P^T B,$$

wobei $A_1$ unreduzierte Hessenbergmatrix ist.

**for** $k = 1, \ldots, n-1$ **do**

Berechne die RQ Zerlegung

$$(A_k - \mu_k I_{n-k+1}) = R_k Q_k =: [r_{ij}^{(k)}]_{i,j=1}^{n} \cdot [q_{ij}^{(k)}]_{i,j=1}^{n}.$$

Partitioniere $Q_k =: \begin{bmatrix} y_k^T \\ \tilde{Q}_k \end{bmatrix}$, $y_k \in \mathbb{R}^n$.

Setze $\tau_k := -\frac{r_{11}^{(k)}}{\beta_k}$ $(\equiv -F_k y_k)$

Berechne $A_{k+1} := \tilde{Q}_k A_k \tilde{Q}_k^T$.

**end for**

$G_n := -\frac{A_n - \mu_n}{\beta_n}$

**for** $k = n-1, n-2, \ldots, 1$ **do**

$G_k := Q_k^T \begin{bmatrix} \tau_k \\ G_{k+1} \end{bmatrix}$

**end for**

$F := (PG_n)^T$.

---

und $\mu_2$ wiederholen und erhalten wiederum eine Gleichung der Form (3.23). Wiederholt man den RQ Schritt $n-1$ mal, bis man bei $\mu_n$ und $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathbb{R}^{1\times 1} \times \mathbb{R}^{1\times 1}$ angekommen ist, dann kann man die Gleichung (3.23) nach $\tilde{F}$ auflösen und daraus dann rückwärts den gesamten Zeilenvektor $F$ bestimmen.

Insgesamt ergibt sich damit der Algorithmus 3.19.

Das Vorgehen bei diesem Algorithmus erläutern wir an einem kleinen Beispiel.

**Beispiel 3.20** *Seien*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \{-1, -2\}.$$

*Es ist $P = I_2$, da $(A, B)$ bereits in System-Hessenbergform vorliegt, und daher $A_1 = A$, $\beta_1 = 1$.*

*Berechne nun die RQ Zerlegung*

$$A_1 - \mu_1 I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = R_1 Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Damit ergeben sich*

$$\tau_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{Q}_1 A_1 \tilde{Q}_1^T = 1.$$

*Die Feedback-Matrix $F$ erhalten wir nun durch*

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{A_2 - \mu_2}{\beta_2} = \frac{1-(-2)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -3\sqrt{2}, \\ G_1 &= Q_1^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = F^T. \end{aligned}$$

*Also ist* $A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *und* $\Lambda(A + BF) = \mathcal{L}$.

**Bemerkung 3.21** *Algorithmus 3.19 verwendet im Wesentlichen numerisch stabile Operationen. Allerdings kann es bei der Berechnung von $G_n$ zu Auslöschungseffekten kommen.*

*Prinzipiell ist das Polvorgabe-Problem ein inverses Problem. Solche Probleme sind meist inhärent schlecht konditioniert, so daß man potentiell mit großer Sensitivität der Pole gegenüber kleinen Störungen rechnen muß. In der Praxis kann dies katastrophale Folgen haben, wenn der Algorithmus z.B. zur Stabilisierung eingesetzt wird. Hier können kleine Störungen $\delta F$ in der Feedback-Matrix dazu führen, daß einer oder mehrere der Eigenwerte $\Lambda(A + B(F + \delta F))$ in der rechten Halbebene liegen. Damit erreicht man dann keine Stabilität des geschlossenen Regelkreises. In der Praxis können solche Systeme durch äußere Einflüße leicht "aus der Bahn" geworfen werden.*