Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 22.04.2009

Kontrolltheorie

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 29.04.2009

Aufgabe 1: (Steuerung einer Parabolantenne)

Das Steuerungsproblem einer Parabolantenne, die immer auf einen Satelliten oder ein Raumfahrzeug gerichtet ist, führt auf folgende vereinfachte Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega(t), \\ j\,\dot{\omega}(t) &= -r\omega(t) + ku(t), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei φ der Drehwinkel, ω die Winkelgeschwindigkeit, j das Trägheitsmoment des Gleichstrommotors, der die Drehung bewirkt, r ein Reibungskoeffizient und k ein Verstärkungsfaktor ist. Unsere Steuerungsfunktion ist die Eingangsspannung $u(t)$, durch den der Gleichstrommotor betrieben wird. Bestimme die Lösung von (1) mit den Anfangswerten $\varphi(0) = 0$ und $\omega(0) = \omega_0$ für die folgenden Steuerungsfunktionen:

a) $u(t) = 0$ (freies System),

b) $u(t) = \alpha\omega(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

c) $u(t) = e^{-t}$.

Wie kann $u(t)$ gewählt werden, so dass $\varphi(1) = \pi$ gilt?

Aufgabe 2: (Fundamentallösung, adjungierte Gleichung)

1) Zeige folgende Eigenschaften der Fundamentallösung $\Phi(t, s)$ von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$:

   (a) $\Phi(t, s) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, s)$ für alle $t, s, \tau \in \mathbb{R}$.

   (b) $\Phi(t, s)$ ist invertierbar für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und es gilt: $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$.

   (c) $\dfrac{\partial \Phi(t, s)}{\partial s} = -\Phi(t, s)A(s)$.

2) Zeige, dass für die Fundamentallösung $\Psi(t, s)$ der adjungierten Gleichung $\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t)$ gilt: $\Psi(t, s) = \Phi(s, t)^T$.

Aufgabe 3: (Laplace-Transformation)

In Ingenieurbüchern wird die Steuerungstheorie oft im sogenannten Frequenzraum und nicht im Zustandsraum dargestellt, indem man das System Laplace transformiert. Ist f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty)$, so heißt

$$\mathcal{L}(f) := \hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformation von f. Zeige die folgenden Rechenregeln:

a) $\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$

b) $\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$

c) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))$

d) $\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

e) $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$ für $\operatorname{Re}(s) > a$

f) $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0.$

Hierbei sind f und g reellwertige Funktionen auf $[0, \infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$.