Lineare Algebra II

Kapitel 7 Euklidische u. unitäre Vektorräume

1. Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K-VR.

Definition 1.1

Eine Abbildung $f : V \times V \to K$ heißt K-Bilinearform, falls
$f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x,y,z \in V$
$f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x,y) + \beta f(x,z) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x,y,z \in V$

Falls gilt: $f(x,y) = f(y,x) \, \forall x, y \in V$ so heißt f symmetrisch.

Die Bilinearform f heißt reflexiv, falls
$\forall u, v \in V : f(u,v) = 0 \iff f(v,u) = 0$

Beispiel (Standardskalarprodukt)

Sei K beliebig und $V = K^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ setze $f(u,v) := u^{\mathrm{tr}} \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$

Offenbar ist f bilinear und symmetrisch.

Sei $u \neq 0$. Ohne Einschränkung sein $u_1 \neq 0$.
Zeige: Ex $v \in V$ mit $f(u,v) \neq 0$.
Wähle $v_2, v_3, ..., v_n \in K$. Setze $x := u_2 v_2 + ... + u_n v_n \in K$
und $v_1 := (1-x) u_1^{-1}$
$\Rightarrow f(u,v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = u_1 v_1 + x = u_1 (1-x) u_1^{-1} + x = 1 \neq 0$

Definition 1.2

Eine symmetrische Bilinearform $f.V \times V \to K$ heißt ausgeartet, falls ex.
$u \neq 0$ mit $f(u,v) = 0 \, \forall v \in V$

Skalarprodukt = nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform.

2. Das euklidische Skalarprodukt

Definition 2.1

Im Fall $K = \mathbb{R}$ heißt das Standardskalarprodukt auch euklidisches Skalaprodukt(SKP)

Notation: $\langle u, v\rangle := u^{\mathrm{tr}}v = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$

Proposotion 2.2

Das euklidische SKP auf $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-linear, symmetrisch und positiv definit, d.h. es gilt: $\langle u, u\rangle \geq 0 \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n$ und $\langle u, u\rangle > 0$ falls $u \neq 0$

Definition 2.3

Die euklidiche Norm eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als
$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$.

3. Das hermitesche Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

Beispiel 3.1

Sei $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ Standard SKP.
$f((1, i), (1, i)) = 1^2 + i^2 = 0$

Die komplexe Konjugation
$: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x + \mathrm{iy} \mapsto \overline{z} := x - \mathrm{iy}$
ist ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$.
$z, w \in \mathbb{C}$

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{\mathrm{zw}} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- bijektiv

Zusätzlich: involution: $\overline{(\overline{z})} = z$

Komplexe Zahlen lassen sich als Paare reeller Zahlen auffassen. Daher haben Vektoren aus $\mathbb{C}^n$ auch euklidische Länge.
$|z| = |x + \mathrm{i}y| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

Wir setzen die Konjugation fort auf $\mathbb{C}^n$

$$\overline{} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : u \mapsto \overline{u} = \begin{pmatrix} \overline{u_1} \\ \vdots \\ \overline{u_n} \end{pmatrix}$$

Definition 3.2

Das hermitesche SKP auf $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch
$z, w \in \mathbb{C}^n$ $\langle x, y \rangle := x^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{y} = x_1\overline{y_1} + ... + x_n\overline{y_n}$

Proposition 3.3

Das hermitesche SKP auf $\mathbb{C}^n$ ist semi-bilinear, d.h.
$\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$

$$(*) \begin{cases} < \alpha z + \beta z', w >= \alpha\langle z, w\rangle + \beta\langle z', w\rangle \\ \langle z, \alpha w + \beta w'\rangle = \overline{\alpha}\langle z, w\rangle + \overline{\beta}\langle z, w'\rangle \end{cases}$$

$$(**)\langle z, w\rangle = \overline{\langle w, z\rangle} \qquad \Rightarrow \text{(reflexiv)}$$

$$(***)\begin{cases} \langle z, z\rangle \geq 0 \ \text{(insbesondere reell)} \\ \langle z, z\rangle > 0 \ \text{falls } z \neq 0 \end{cases}$$

Bemerkung 3.4

eine reflexive, nicht ausgeartete(*) Semi-Bilinearform heißt auch Skalarprodukt.

(*) $\iff: \forall u \neq 0 \exists v : f(u, v) \neq 0$ (und $f(v, u) \neq 0$)

4. Euklidische und unitäre Räume

Definition 4.1

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit einer symmetrischen, positiv definiten
$\mathbb{R}-$Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$. Dann heißt $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$
<u>euklidischer Raum.</u>

Definition 4.2

Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit einer hermiteschen, positiv definiten
$\mathbb{C}$-Semi-Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{C}$. Dann heißt $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$
<u>unitärer Raum.</u>

Beispiel 4.3

Sei V euklidischer Raum und $W\leq V$ Unterraum von V
$\Rightarrow (W,\langle\cdot,\cdot\rangle \mid W\times W)$ euklidisch. (analog fü unitäre Räume)

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitärer Raum. Insbesondere ist V ein $\mathbb{C}$-VR mit
komplexer Skalarmultiplikation: $\mathbb{C}\times V\to V : (\lambda,v)\mapsto \lambda v$

Diese lässt sich einschränken auf reelle Skalare:
$\mathbb{R}\times V\to V : (\lambda,v)\mapsto \lambda v$
Man erhält einen reellen Vektorraum, $V_{\mathbb{R}}$(der doppelten Dimension)

Definiere $(\cdot,\cdot) : V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R} : (v,w) := \mathrm{Re}\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle}\Big)$
$= \frac{1}{2}(\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle)$

Diese Abbildung ist eine symmetrische, positiv definite $\mathbb{R}$-Bilinearform,
d.h. $(V_{\mathbb{R}},(\cdot,\cdot))$ ist ein euklidischer Raum

Definition 4.4

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Raum. Dann definiert
$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$ die <u>Norm</u> (oder <u>Länge</u>) von V.
Zwei Vektoren $v,w\in V$ heißen <u>orthogonal,</u> falls $\langle v,w\rangle = 0 = \langle w,v\rangle$.
Man schreibt $v\perp w$. Vektoren der Norm 1 heißen <u>Einheitsvektoren</u>.

Reflexivität von $\langle\cdot,\cdot\rangle \Rightarrow$ Orthogonalitätsrelation symmetrisch.

Koeffizientenkörper: $\mathbb{K}$
V euklidisch: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
V unitär: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Bemerkung 4.5

Für ein Skalar $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt:
$\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \|v\|$

Bemerkung 4.6

es gelten die Polarisierungsidentitäten:
(i) euklidisch: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$
(ii) unitär: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

5. Geometrische Eigenschaften

Satz 5.1 (Cauchy-Schwarz)

Für $x, y \in V$ gilt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Beweis: Da $\alpha \mapsto a^2$ als Abb. von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in sich monoton ist, genügt es $\langle x, y \rangle \cdot \overline{\langle x, y \rangle} = \langle x, y \rangle \cdot \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ zu zeigen:
Fall1: $y = 0$ (klar)
Fall2: $y \neq 0 \Rightarrow \langle y, y \rangle > 0$. Setze $\gamma := \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, x \rangle} \Rightarrow 0 \leq \langle x - \gamma y, x - \gamma y \rangle$
$= \langle x, x \rangle - \langle x, \gamma y \rangle - \langle \gamma y, x \rangle + \langle \gamma y, \gamma y \rangle$
$= \langle x, x \rangle - \overline{\gamma} \langle x, y \rangle - \gamma \langle y, x \rangle + \gamma \overline{\gamma} \langle y, y \rangle$
$= \langle x, x \rangle - \overline{\gamma} \gamma \langle y, y \rangle - \gamma \langle y, x \rangle + \gamma \overline{\gamma} \langle y, y \rangle$
$= \langle x, x \rangle - \gamma \langle y, x \rangle$
$\Rightarrow \gamma \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$
$= \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle y, x \rangle$
$\square$

Definition 5.2

Zu $x, y \in V \setminus \{0\}$ sei der Winkel $\gamma \in [o, \pi]$ definiert durch
$\cos\gamma = \frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \in [-1, 1]$

Bemerkung 5.3

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow -1 \leq \frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1$
Damit ist $\gamma \in [0, \pi]$ eindeutig festgelegt.
Insbesondere: $x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0 \iff \gamma = \frac{\pi}{2}$

Satz 5.4(Pythagoras)

Für $x, y \in V$ mit $x \perp y$ ist $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
Beweis: Sei $x \perp y \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 = \langle y, x\rangle \Rightarrow \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle$
$= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$
$\square$

6. Metrische Räume

Definition 6.1

Sei M beliebige Menge. Eine Abbildung
$\delta : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
mit: $\delta(x, y) = \delta(y, x)\ \forall x, y \in M$ (symmetrie)
$\delta(x, y) = 0 \iff x = y$ (definitheit)
$\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ (Dreiecksungleichung)
heißt Metrik auf M. (M, δ) heißt metrischer Raum.

Satz 6.2

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Dann definiert
$\delta(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$ eine Metrik auf V.

Proposition 6.3

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Raum. Dann gilt: $\forall x, y \in V$
i) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff$ ex ein $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \alpha x = y$
ii) $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x$ und y linear abhängig

Beweis: ÜA

Lemma 6.4
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch mit Metrik δ. $\forall x, y \in V : \exists! m_{x,y} \in V$ mit
$\delta(x, m_{x,y}) = \delta(y, m_{x,y}) = \frac{1}{2}\delta(x, y)$.
Beweis: ÜA

Proposition 6.5
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch mit Metrik δ. Eine Abbildung $\varphi : V \to V$ mit
$\varphi(0) = 0$ und $\delta(\varphi(x), \varphi(y)) = \delta(x, y) \ \ \forall x, y \in V$ ist linear.

7. Weitere Beispiele

(1) Sei K ein belibiger Körper und f eine K-Bilinearform auf dem K-VR V.
Wir setzen voraus, dass die Dimension von V endlich ist.($\dim_K(V) < \infty$)

Sei $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ Basis von V.
Definiere Matrix $[f]_B = (f_{ij})_{i,j} \in K^{n\times n}$ durch $f_{i,j} := f(v_i, v_j)$.

Für alle $u, v \in V$ gilt:
$[u]_B^{\mathrm{tr}} \cdot [f]_B \cdot [v]_B = f(u, v)$ (*)
weil f bilinear ist. Die Matrix $[f]_B$ ist symmetrisch, d.h. $[f]_B^{\mathrm{tr}} = [f]_B$
falls f symmetrisch ist, Umgekehrt definiert jede symmetrische Matrix
$M \in K^{n\times n}$ vie (*) eine symmetrische Bilinearform auf K^n.
f ist nicht ausgeartet $\iff \det[f]_B \neq 0$

Beispiel 7.1
$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ definiert symmetrische K-Bilinearform k auf K^2 durch

$$(u_1, u_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (u_2, u_1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_2v_1 + u_1v_2 = h(u, v)$$

Speziell: $K = \mathbb{R}$ $\{h(v,v) \mid v \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}$ (nicht ausgeartet)

$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = -1 + -1 = -2$

$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$h(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 h(u,u),\ \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel 7.2

Für $m, n \in \mathbb{N}$ definiert die reelle Diagonalmatrix (nicht ausgeartet)

$\mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m \text{ mal}}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{n \text{ mal}})$

eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{m+n}$

$f_{m,n}(u,v) = u_1 v_1 + \ldots + u_m v_m - u_{m+1} v_{m+1} - \ldots - u_{m+n} v_{m+n}$

ist postiv definit $\iff n = 0$

ist negativ definit $\iff m = 0$

Analoges gilt für $K = \mathbb{C}$ und hermitesche Semi-Bilinearformen.
Eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, falls $M^{\mathrm{tr}} = \overline{M}$. Jede hermitesche Matrix M definiert eine hermitesche Semi-Bilinearform:

$f_M(u,v) := u^{\mathrm{tr}} \cdot M \cdot \overline{v}$, dann: $f_M(v,u) = v^{\mathrm{tr}} \cdot M \cdot \overline{u} = \overline{u}^{\mathrm{tr}} \cdot M^{\mathrm{tr}} \cdot v$

$= \overline{u}^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{M} \cdot \overline{\overline{v}} = \overline{u^{\mathrm{tr}} \cdot M \cdot \overline{v}} = \overline{f_M(u,v)}$

(2) Bilinearform(en) auf Funktionen.

Sei $V = \mathcal{C}[0,1]$ die Menge der stetigen Funktionen
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Via
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in [0,1]$
und $(\lambda f)(x) = \lambda[f(x)] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
ist $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-VR

Setze $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{dx} \in \mathbb{R}$

Eigenschaften: symmetrisch, weil Multiplikation in $\mathbb{R}$ kommutativ.
$\mathbb{R}$-Bilinear wegen bekannte Rechenregeln für Integrale.

Proposition 7.4

Das Paar $(\mathcal{C}[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein euklidischer Raum.

Beweis: Zu zeigen: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit. Sei $f \in \mathcal{C}[0,1]$ beliebig.

$\Rightarrow \langle f,f\rangle = \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{dx} \geq 0 \qquad f^2 : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto [f(x)]^2$

Mit f ist auch f^2 stetig. Damit folgt aus $\langle f,f\rangle = 0 = \int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{dx} \underset{\text{Ana}}{\Rightarrow} f^2 = 0$

$\Rightarrow f = 0$

Bemerkung 7.5

Es folgt Cauchy-Schwarz etc.

Die zugehörige Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{dx}}$ ist ein spezialfall von

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_0^1 |f(x)\mathrm{dx}|^p} \quad$ für $1 \leq p < \infty \qquad L^p$ – Norm auf V.

8. Orthonormalbasen

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Der Fall $\dim_K V = \infty$ ist zugelassen.

Definition 8.1

Eine Familie $O = (v_1, v_2, ..., v_n)$ in $V \setminus \{0\}$ heißt <u>Orthogonalsystem</u> falls
$v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$
falls zusätzlich $\|v_i\| = 1\ \forall i\ \wedge \langle v_i, v_j\rangle = 0$ so heißt O
<u>Orthonormalsystem.</u>

Ein Orthonormalsystem, das V linear erzeugt, heißt <u>Orthonormalbasis</u> von V (ONB)

Lemma 8.2

Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig.

Beweis: Sei $(v_1, \dots, v_m)$ Orthogonalsystem. Angenommen es ex.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$ dann gilt $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$:

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle v_i, v_k\rangle = \lambda_k \overbrace{\langle v_k, v_k\rangle}^{\neq 0} \Rightarrow \lambda_k = 0$$

$\Rightarrow \forall \in \{1, \dots, k\} : v_i \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\langle v_i, v_i\rangle} = \|v_i\| \neq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2, \dots, \frac{1}{\|v_k\|} v_k\right)$ ONB von $\mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_k)$

$$\left\|\frac{1}{\|v_i\|} v_i\right\| = \frac{1}{\|v_i\|} \|v_i\| = 1$$

Beispiel 8.3

(i) Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sond ONB.

(ii) Für beliebige $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $\left(\begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}\right)$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \right\rangle = -\cos\gamma\sin\gamma + \sin\gamma\cos\gamma = 0$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \right\| = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$$

Bemerkung 8.4 (Koordinaten bzgl Orthogonalbasis)

Sei $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine ONB von V ($\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_{<\infty}$)

Dann lässt sich ein beliebiger Vektor $v \in V$ eindeutig darstellen

als $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$,für $\lambda_i \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \langle v, b_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k, b_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_k, b_i\rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i\rangle = \lambda_i$$

Beispiel 8.5

Betrachte ONB

$\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\right)$ aus $\mathbb{R}^2$

Für $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} : \left\langle v, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$

$$: \left\langle v, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

9. Trigonometrische Funktionen

$V = \mathcal{C}[0,1]$, $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}$

Lemma 9.1 Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int\limits_0^1 \sin(2\pi mx) \cdot \sin(2\pi nx)\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, \text{ für } m \neq n \\ \frac{1}{2}, \text{für } m = n > 0 \\ 0, \text{ für } m = n = 0 \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten $m \neq n$. Partielle Integration liefert:

$$\int\limits_0^1 \dots \,\mathrm{dx} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin(2\pi(m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin(2\pi(m+n)x)}{m+n}\right)\Bigg|_0^1 = 0 - 0 = 0$$

$\int\limits_0^1 \sin^2(0)\mathrm{dx} = 0$, Für $m > 0 : \int\limits_0^1 \sin^2(2\pi mx)\mathrm{dx} = \frac{2\pi mx - \sin(2\pi mx)\cos(2\pi mx)}{4\pi m}\Bigg|_0^1$

$= \frac{2\pi mx}{4\pi m} = \frac{1}{2}$

Lemma 9.2

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\int\limits_0^1 \sin(2\pi mx)\cos(2\pi nx)\mathrm{dx} = 0$

Lemma 9.3

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int\limits_0^1 \cos(2\pi mx)\cos(2\pi nx)\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, \text{ für } m \neq n \\ \frac{1}{2}, \text{ für } m = n > 0 \\ 1, \text{ für } m = n = 0 \end{cases}$$

Aus 9.1 bis 9.3 folgt:

Proposition 9.4
Die Funktion $v_0, v_1, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots$ mit
$v_k(x) = \cos(2\pi kx)$, $w_k(x) = \sin(2\pi kx)$
für $k \in \mathbb{N}$ bilden ein Orthogonalsystem in $\mathcal{C}[0,1]$

Durch Skalieren mit $\sqrt{2}$ erhält man ein Orthonormalsystem:
$\widetilde{v_0} = v_0, \widetilde{v_1} = \sqrt{2}v_1, \widetilde{v_2} = \sqrt{2}v_2, \dots, \widetilde{w_1} = \sqrt{2}w_1, \dots$

Definition 9.5
Der Lineare Teilraum $\mathcal{T}_n = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(v_0, v_1, \dots, w_1, \dots)$ in $\mathcal{C}[0,1]$
heißt <u>Raum</u> der <u>trigonometrischen Polynome</u> vom Grad $n \leq 1$

Die Elemente von $\mathcal{T}_n$ bestehen aus Linearkombinationen
$T = \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k v_k + \beta_k w_k)$, d.h.
$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(2\pi kx) + \beta_k \sin(2\pi kx))$

10. Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine linear
unabhängige Familie in V. Setze $\mathcal{U} := \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, \dots, b_n)$.

<u>Ziel:</u> Konstruiere eine ONB von $\mathcal{U}$.

Dazu: $u_1 := b_1$ und $v_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1$
$u_2 := b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 \qquad v_2 := \frac{1}{\|u_2\|} u_2$
$u_3 := b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \qquad v_k := \frac{1}{\|u_k\|} u_k$
$\vdots$
$u_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_n, v_i\rangle v_i$

Satz 10.1 Die Familie $(v_1, ..., v_m)$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathcal{U} = \text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, ..., b_k)\ \forall k = 1, \dots, m$.

<u>Beweis:</u> Induktionsbeweis über k.
IA: Für $k = 1$ ist $v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ eine Orthonormalbasis von $\text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1)$

Induktionsschritt: Sei $u_{k+1} = b_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1}, v_i \rangle v_i \quad (*)$

Da $b_{k+1} \notin \text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, \dots, b_k) \overset{\text{IV}}{=} \text{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_k)$ ist $u_{k+1} \neq 0$
und wir können $v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ definieren.
Nach (*) gilt $u_{k+1} \in \text{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_k, b_{k+1}) = \text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, \dots, b_k)$.
Stellt man (*) um, so erhält man $b_{k+1} = u_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1}, v_i \rangle v_i$ und damit ist $b_{k+1} \in \text{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1}) = \text{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_{k+1})$
Also gilt $\text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, \dots, b_{k+1}) = \text{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_{k+1})$.
Daraus folgt, dass $(v_1, \dots, v_{k+1})$ eine Basis von $\text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, \dots, b_{k+1})$ weil $\dim \text{lin}_{\mathbb{K}}(b_1, \dots, b_{k+1}) = k + 1$

Nach IV gilt $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, \dots, k\}$.
Für u_{k+1} gilt:

$$\langle u_{k+1}, v_i \rangle = \left\langle b_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle b_{k+1}, v_j \rangle v_j, v_i \right\rangle$$

$$= \langle b_{k+1}, v_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle b_{k+1}, v_j \rangle \langle v_j, v_i \rangle$$

$$= \langle b_{k+1}, v_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle b_{k+1}, v_j \rangle \delta_{ij}$$

$$= \langle b_{k+1}, v_i \rangle - \langle b_{k+1}, v_i \rangle = 0$$

Für $v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ gilt dann:

$$\langle v_{k+1}, v_i \rangle = \left\langle \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}, v_i \right\rangle = \frac{1}{\|u_{k+1}\|} \langle u_{k+1}, v_i \rangle = 0$$

$\square$

Korollar 10.2
Jeder endlich dimensionale Teilraum besitzt eine Orthonormalbasis

11. Orthogonale Teilräume

Definition 11.1

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer VR und $M \subseteq V$. Dann ist
$M^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, m \rangle = 0 \, \forall m \in M\}$
das orthogonale Komplement von M, bzw. der zu M orthogonale Teilraum.

Lemma 11.2

$M^{\perp}$ ist ein UVR von V.
<u>Beweis:</u> ✓

Lemma 11.3

Seien $A, B \subset V$. Dann gilt:
$i)$ $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$
$ii)$ $A \subseteq B^{\perp} \iff B \subseteq A^{\perp}$
$iii)$ $A \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$
$iv)$ $A^{\perp} = \left(\left(A^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}$

<u>Beweis:</u> $i)$ Sei $v \in B^{\perp}$, d.h. $\langle v, b \rangle = 0 \, \forall b \in B$
Da $A \subseteq B$ ist, gilt insbesondere $\langle v, a \rangle = 0 \ \forall a \in A \subseteq B$
zu $ii)$ "$\Rightarrow$" Sei $b \in B$. Dan gilt $\langle a, b \rangle = 0 \forall a \in A$,
da $A \subseteq B^{\perp}$. Da $\langle . , . \rangle$ symmetrisch ist gilt: $\langle b, a \rangle = 0 \forall a \in A$, also
$b \in A^{\perp} \Rightarrow B \subseteq A^{\perp}$
"$\Leftarrow$" folg aus "$\Rightarrow$" per Symmetrie.

Bemerkung 11.4

Betrachte den endlich dimensionalen Spzialfall $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt.
Sei $a \in V$. Dann ist $\{a\}^{\perp} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \langle a, v \rangle = 0\}$
Für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $a_i, v_i \in \mathbb{K}$ für alle i

Dann ist $\langle a, v \rangle = a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0$ d.h. v ist die Lösung einer homogenen linearen Gleichung.

Für $a \neq 0$ ist $\{a\}^\perp$ eine lineare Hyperebene. Sind $a, b, c, ... \in \mathbb{K}^n$, dann ist $\{a, b, c, ...\}^\perp = \{a\}^\perp \cap \{b\}^\perp \cap \{c\}^\perp \cap ...$ die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems.
$\langle a, v\rangle = 0, \langle b, v\rangle = 0, \langle c, v\rangle = 0, ...$

Lemma 11.5

Sei $\{a_1, \dots, a_k\} \subset V$ und $U = \text{lin}_\mathbb{K}\{a_1, \dots, a_k\}$. Dann gilt
$U^\perp = \{a_1, \dots, a_k\}^\perp$
<u>Beweis:</u> "$\subseteq$" folgt aus Lemma 11.3.(i) mit $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq U$
$\Rightarrow U^\perp \subseteq \{a_1, \dots, a_k\}^\perp$.

"$\supseteq$" Sei $u \in U$. Da $U = \text{lin}_\mathbb{K}\{a_1, \dots, a_k\}$ ist, existieren $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $u = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$

Sei $v \in \{a_1, \dots, a_k\}^\perp$. Dann gilt
$\langle v, u\rangle = \left\langle v, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_i \underbrace{\langle v, a_i\rangle}_{=0} = 0$
Also liegt $v \in u^\perp$ $\forall u \in U$ und damit in $U^\perp$.

Satz 11.6

Sei $U \leq V$ endlich dimensionaler UVR von V und $(u_1, \dots, u_k)$ eine Orthonormalbasis von U.
Für die Abbildung
$\pi : V \to V, v \mapsto \sum\limits_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i$
gelten folgende Eigenschaften:
$i)$ π ist linear
$ii)$ $\pi(v) \in U$ für alle $v \in V$
$iii)$ $\pi(u) = u$ $\forall u \in U$
$iv)$ $\pi \circ \pi = \pi$
$v)$ $\text{img}(\pi) = U$ und $\ker(\pi) = U^\perp$
$vi)$ $v - \pi(u) \in U^\perp$ $\forall v$

$vii)$ $\|v - \pi(v)\| \leq \|v - u\|$ $\forall v \in V$ und $\forall u \in U$
Gleichheit gilt nur für $u = \pi(v)$

<u>Beweis:</u>

iii) $\forall i : \pi(u_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}} u_j = u_i$

π heißt <u>orthogonal Projektion</u> auf U.

Bemerkung 11.7
π hängt nicht von <u>nicht</u> von der gewählten ONB ab.

12. Fouriertransformation

Sei $\pi_n : \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow \mathcal{T}_n$ die orthogonale Projekton vom Raum aller stetigen Funktionen auf die trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq$ n. Aus 11.6 folgt, dass $\pi_n(f)$ die beste Approximation von $f \in \mathcal{C}[0,1]$ durch durch trigonometrische Polynome vom Grad $\leq n$ ist bzgl $\langle . , . \rangle$.

Es gilt: $\pi_n(f) = \langle f, \widetilde{v_0} \rangle \widetilde{v_0} + \sum\limits_{k=1}^{n} (\langle f, \widetilde{v_k} \rangle \widetilde{v_k} + \langle f, \widetilde{w_k} \rangle \widetilde{w_k})$

$= \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k \text{cos}(2\pi k x) + \beta_k \text{sin}(2\pi k x))$

mit $\alpha_0 = \int\limits_0^1 f(x) \text{dx}$

$\alpha_k = \sqrt{2} \int\limits_0^1 f(x) \text{cos}(2\pi k x) \text{dx} \quad k \geq 1$

und $\beta_k = \sqrt{2} \int\limits_0^1 f(x) \text{sin}(2\pi k x) \text{dx} \quad k \geq 1$

Die Koeffizienten α_i, β_i heißen <u>Fourierkoeffizienten</u> von f.
Die unendliche Reihe $\alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \text{cos}(2\pi k x) + \beta_k \text{sin}(2\pi k x))$ heißt <u>Fourierreihe</u> von f.

Satz 12.2 (ohne Beweis)
Falls f zweimal stetig differenzierbar ist und periodisch, dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.
f periodisch: $f(0) = f(1) \wedge f'(0) = f'(1) \wedge f''(0) = f''(1)$

13. Summen in Vektorräumen

Innere direkte Summen von Teilräumen
Sei V ein (möglicherweise undendlich dimensionaler) VR über K

Definition 13.1
Für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq V$ heißt
$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
die Minkowski-Summen von A und B.

Lemma 13.2
Falls A und B Teilräume sind, so auch $A + B$.
Beweis: Seien $a + b, a' + b' \in A + B, \lambda, \mu \in K$
$\Rightarrow \lambda(a + b) + \mu(a' + b') = \underbrace{(\lambda a + \mu a')}_{\in A} + \underbrace{(\lambda b + \mu b')}_{\in B} \in A + B$

Beispiel 13.3 $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$ Betrachte
$A = \left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right], B = \left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right], C\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right]$

Definition(Wdh.) $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$
Konvexe Hülle von x und y (Verbindungsstrecke)

Lemma 13.4

Seien $A, B \leq V$ endlich dimensionale Teilräume

$\Rightarrow \dim_K(A+B) = \dim_K A + \dim_K B - \dim_K(A \cap B)$

<u>Beweis:</u> Sei $(c_1, \dots, c_k)$ Basis von $A \cap B$. Aus dem Basisergänzungssatz, folgt: $\exists a_1, \dots, a_m \in A, b_1, \dots., b_n \in B$ mit $(a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_k)$ ist Basis von A und $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k)$ ist Basis von B.

$\Rightarrow (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k)$ ist dann Basis von $A + B$.

$\Rightarrow \dim_K(A+B) = m + n + k = (m+k) + (n+k) - k$

$= \dim_K A + \dim_K B - \dim_K(A \cap B)$

Definition 13.5

Seinen $A, B \leq V$ Teilräume mit $A \cap B = 0$.

Dann heißt die Summe $A + B$ auch innere direkte Summe von A und B in V. Wir schreiben: $A \oplus B$.

Bemerkung 13.6

$\dim_K(A \oplus B) = \dim_K(A) + \dim_K(B)$.

<u>*Äußere direkte Summen von Vektorräume*</u>

Seien V, W Vektorräume über dem selben Körper K.

Dann ist das Kartesische Produkt $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein $K-$VR.

Für $V \times W$ ist auch der Begriff <u>äußere direkte Summe</u> üblich, denn: $V \times \{0\}$ und $\{0\} \times W$ sind zu V bzw. W isomorphe Teilräume von $V \times W$, und es gilt:

$\underbrace{(V \times \{0\})}_{\leq V \times W} + \underbrace{(\{0\} \times W)}_{\leq V \times W} = V \times W$

Bemerkung/Warnung

Auch für äußere direkte Summe schreiben wir "$\oplus$"

Unterscheidung innere/äußere Summe aus dem Kontext!

Seien $f : V \times V \to K$ und $g : W \times W \to K$ beides K-Bilinearformen auf V bzw. W.
Dann ist $f \oplus g : (V \oplus W) \times (V \oplus W) : ((v,w),(\ v', w'\ )) \mapsto f(\ v, v'\ ) + g(\ w, w'\ )$

Lemma 13.7

Sind f und g beide symmetrisch/nicht ausgeartet, dann ist auch $f \oplus g$ symmetrisch/nicht ausgeartet.

Beweis: z.b. seien f und g beide symmetrisch $h = f \oplus g$
$f(v,v') = f(v',v),\ g(w,w') = g(w',w)$
d.h. $h\left((v',w'),(v,w)\right) = f(v',v) + g(w',w) = f(v,v') + g(w,w')$
$= h((v,w),(v'w'))\ \forall v,v' \in V, w,w' \in W.$
$\square$

Analoges gilt für (komplexe) Semi-Bilinearform:
für endlich-dimensionale gilt Folgendes:
Seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ Basen von V bzw. W. Dann ist
$(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := ((b_1,0),(b_2,0),\dots,(b_m,0),(0,c_1),\dots,(0,c_n))$
eine Basis der direkten Summe $V \oplus W$.

Lemma 13.8 Für $A = [f]_{\mathcal{B}} \in K^{m\times m}$ und $B = [g]_{\mathcal{C}} \in K^{n\times n}$ ist
$[f \oplus g]_{(\mathcal{B},\mathcal{C})} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in K^{m+n\times m+n}$

Beweis: $f \oplus g((b_i,0),(b_j,0)) = f(b_i,b_j) + g(0,0) = f(b_i,b_j) = a_{i,j}$
$f \oplus g((b_i,0),(0,c_j)) = \underbrace{f(b_i,0)}_{=0} + \underbrace{g(0,c_j)}_{=0} = 0$
$\square$

Beispiel 13.9

Für das Standard SKP $f : K^n \times K^n \to K$ gilt:
$f = \underbrace{(1) \oplus (1) \oplus \dots \oplus (1)}_{n-\text{mal}}$
$\lambda \in K$
$(\lambda) : K^1 \times K^1 : (x,y) \mapsto \lambda \cdot x \cdot y$

Beispiel 13.10
Für die Bilinearform $f_{m,n}$ auf $\mathbb{R}^{m+n}$ gilt
$f_{m,n} = \underbrace{(1) \oplus (1) \oplus ... \oplus (1)}_{n \text{ mal}} \oplus \underbrace{(-1) \oplus ... \oplus (-1)}_{m \text{ mal}}$

<u>*Orthogonale Summen in euklidischen oder unitären Räumen*</u>
Sei $(V, \langle . , . \rangle)$ eunklidischer oder unitärer Raum.

Proposition 13.11
Sei $U \leq V$ endlich dimensionaler Teilraum. Dann gilt
$V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ (als innere direkte Summe)
Falls $\dim_\mathbb{K} V < \infty$, so ist $\dim_\mathbb{K} \mathcal{U}^\perp = \dim_\mathbb{K} V - \dim_\mathbb{K} U$.

<u>Beweis:</u> Es gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = 0$, weil $\langle . , . \rangle$ positiv definit ist.
Wir zeigen nun $V = \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp$.
Sei π die orthogonale Projektion von V auf $\mathcal{U}$,
aus Satz 11.6 $\pi(u) \in \mathcal{U}$ und $v - \pi(u) \in \mathcal{U}^\perp$
$\Rightarrow V = \underbrace{\pi(u)}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{(v - \pi(u))}_{\in \mathcal{U}^\perp}$
$\square$

Korollar 13.12
Sei $\mathcal{U} \leq V$ endlichdim. Teilraum. Dann gilt $\left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp = \mathcal{U}$

<u>Beweis:</u> Es gilt stets $\mathcal{U} \subseteq \left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp$. Aus 13.11: $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp \Rightarrow \left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp = (\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp) \cap \left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp =$
$\left(\mathcal{U} \cap \left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp\right) + \left(\mathcal{U}^\perp \cap \left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp\right)$
$= \mathcal{U} + 0 = \mathcal{U}$

14. Orthogonale und unitäre Abbildungen

Sei $(V, \langle . , . \rangle)$ euklidischoder unitär.

Definition 14.1

Eine lineare Abbildung $g : V \to V$ heißt (im euklidischen/unitären Fall) orthogonal/unitär, falls $\forall x, y \in V : \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
Orthogonale bzw. unitäre Abbildungen respektieren die Längenfunktion (Norm) die Abstandsfunktion und Winkel, da diese durch das Skalarprodukt ausgedrückt werden.

Lemma 14.2

Jede orthogonale oder unitäre lineare Abbildung ist injektiv.
Beweis: Sei $g : V \to V$ linear, aber nicht injektiv.
$\Rightarrow$ex $x \in V \setminus \{0\} : g(x) = 0$
$\Rightarrow \langle g(x), g(x) \rangle = 0 \; \wedge \langle x, x \rangle > 0$
Widerspruch

Definition 14.3

Eine bijektive orthogonale lineare Abbildung heißt orthogonale Transformation (analog für unitär)

Definition 14.4

Wir bezeichnen(im euklidischen Fall) mit
$O(V) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid g \text{ orthogonal}\}$
die orthogonale Gruppe auf V und(im unitären Fall) mit
$U(V) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid g \text{ unitär}\}$
die unitäre Gruppe auf $(V, \langle . \, , . \rangle)$

Fall $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty \Rightarrow$ jede orthogonale bzw. unitäre lineare Abbildung ist bijektiv, also eine Transformation.

Bemerkung 14.5

Es ist zu zeigen, dass $O(V)$ und $U(V)$ tatsächlich Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$ sind.

Beispiel 14.6
Sei $(V, \langle . , . \rangle)$ euklidisch. Dann ist das Skalarprodukt
bilinear und symmetrisch.
Für $a \in V \setminus \{0\}$ ist
$\langle a, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle a, x \rangle$
eine Linearform d.h. ein Element aus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

Die Abbildung
$s_a : V \to V : x \mapsto x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a$
heißt Spiegelung an der linearen Hyperebene $\ker\langle a, \cdot \rangle$.
Offenbar ist s_a linear. Es gilt $\forall x, y \in V$
$\langle s_a(x), s_a(y) \rangle = \left\langle x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a, y - 22\frac{\langle a,y \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a \right\rangle$
$= \langle x, y \rangle - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot \langle a, y \rangle - 2\frac{\langle a,y \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot \langle a, x \rangle + 4\frac{\langle a,x \rangle \langle a,y \rangle}{\langle a,a \rangle^2} \langle a, a \rangle$
$= \langle x, y \rangle$

Es gilt: $s_a(x) = x \iff \langle a, x \rangle = 0 \iff x \in \ker\langle a, \cdot \rangle$
Zusätzlich ist $\forall x \in V$
$s_a(s_a(x)) = s_a\left(x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a\right) = x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a - 2\frac{\left\langle a, x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a \right\rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a$
$= x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} \cdot a + 4\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle^2} \cdot \langle a, a \rangle \cdot a = x$
D.h. s_a ist eine Involution, insbesondere ist s_a bijektiv,
also eine orthogonale Transformation.

im Folgenden Sei V endlich dimensional.

Bemerkung 14.7
Aus Satz 6.5 und den Polarisierungsidentitäten 4.6 folgt, dass
jede Isometrie auf $\mathbb{R}^n$ einer orthogonale Transformation ist.

Proposition 14.8
Sei $(v_1, v_2 , \ldots , v_n)$ eine ONB von V. Eine Lineare Abbildung
$g : V \to V$ ist genau dann orthogonal (bzw. unitär), wenn
$(g(v_1), g(v_2), \ldots , g(v_n))$ ONB von V ist.

<u>Beweis:</u> Nach Vor. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Sei g orthogonal(bzw. unitär) $\Rightarrow \langle g(v_i), g(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$

$\Rightarrow (g(v_1), \dots, g(v_n))$ ONB

Umgekehrt seien $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$,$y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i v_i \quad \in V$ beliebig.

$$\Rightarrow \langle g(x), g(y)\rangle = \left\langle g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right), g\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(v_i), \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(v_i)\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\mu}_j \langle g(v_i), g(v_j)\rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\mu}_j \delta_{i,j} = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\mu}_j \langle v_i, v_j\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \right\rangle = \langle x, y\rangle$$

$\square$

$\mathrm{SL}(V) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(g) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ die <u>spezielle lineare Gruppe.</u>

Definition 14.9

Wir bezeichnen (im euklidischen Fall) mit

$\mathrm{SO}(V) := O(V) \cap \mathrm{SL}(V)$ die <u>spezielle orthogonale Gruppe</u>

und(im unitären Fall) mit

$\mathrm{SU}(V) := U(V) \cap \mathrm{SL}(V)$ die <u>spezielle unitäre Gruppe.</u>

Definition 14.10

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt <u>orthogonal,</u> falls

$Q \cdot Q^{\mathrm{tr}} = E_n$

Eine Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt <u>unitär,</u> falls

$Q \cdot Q^{*} = E_n$

wobei $Q^* := Q^{\mathrm{tr}} = \left(\overline{Q}\right)^{\mathrm{tr}}$ Für $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is $Q^* = Q^{\mathrm{tr}}$

Die Menge der orthogonalen bzw. unitären Matrizen wird mit $Q_n\mathbb{R}$ bzw. $U_n\mathbb{C}$ bezeichnet. Entsprechend:

$\mathrm{SO}_n\mathbb{R} := O_n\mathbb{R} \cap \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, $\mathrm{SU}_n\mathbb{C} := U_n\mathbb{C} \cap \mathrm{SL}_n\mathbb{C}$.

Aufgabe

Die Mengen $O_n\mathbb{R}, U_n\mathbb{C}, \mathrm{SO}_n\mathbb{R}, \mathrm{SU}_n\mathbb{C}$ bilden
Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ es gilt $O_n\mathbb{R} \cong O(\mathbb{R}^n)$

Lemma 14.11

Für Q reell orthogonal gilt: $\det Q \in \{\pm 1\}$
<u>Beweis:</u> Q orthogonl $\Rightarrow Q \cdot Q^{\mathrm{tr}} = E_n \Rightarrow \det(Q \cdot Q^{\mathrm{tr}}) = (\det\mathrm{Q})(\det Q^{\mathrm{tr}})$
$\Rightarrow (\det Q)^2 = 1$
Drehgruppe von $\mathbb{R}^n = \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$
$\square$

Beispiel 14.12

a)
$V = \mathbb{R}^2, \gamma \in \mathbb{R}$
$Q = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow Q \cdot Q^{\mathrm{tr}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos^2\gamma + \sin^2\gamma & 0 \\ 0 & \sin^2\gamma + \cos^2\gamma \end{pmatrix} = E_2$

Also ist Q orthogonal.
$\det(Q) = 1$
$\Rightarrow Q \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$
$Q =$Drehung um γ im positiven Sinn.

Speziell: $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \langle v, Qv \rangle = 0 \, \forall v \in \mathbb{R}^2$

Jedes Element aus $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ sieht so aus!

b)
$V = \mathbb{R}^2, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq 0.$
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$s_a(e_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{\left\langle a, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\langle a,a\rangle} \cdot a = \begin{pmatrix}1 - \frac{2}{\|a\|^2}a_1^2 \\ -\frac{2}{\|a\|^2}a_1a_2\end{pmatrix}$$

$$[s_a] = \begin{pmatrix}1 - \frac{2}{\|a\|^2}a_1^2 & -\frac{2}{\|a\|^2}a_1a_2 \\ -\frac{2}{\|a\|^2}a_1a_2 & 1 - \frac{2a_2^2}{\|a\|^5}\end{pmatrix}$$

$$\det\,[s_a] = \left(1 - \frac{2}{\|a\|^2}a_1^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{2a_2^2}{\|a\|^5}\right) - \left(\frac{2}{\|a\|^2}a_1a_2\right)^2 = 1$$

Satz 14.13

Für eine Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(i) Die lineare Abbildung $\varphi_Q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist orthogonal(bzw. unitär)

(ii) Spalten von Q bilden ein Orthonormalsystem

(iii) Zeilen vom Q bilden ein Orthonormalsystem

(iv) $Q \cdot Q^* = E_n$

(v) $Q^* \cdot Q = E_n$

(vi) $Q \in \mathrm{GL}_n\mathbb{K} \wedge Q^{-1} = Q^*$

<u>Beweis:</u> Die Standardbasis $(e_1, \dots, e_i)$ in $\mathbb{K}^n$ ist eine ONB.

Proposition 14.8:φ_Q ist orthogonal bzw unitär $\iff$ Bild der Standardbasis unter φ_Q eine ONB ist.

$\varphi(e_i) = q_{\cdot,i}$ (i-te Spalte von Q) $Q = (q_{ij})$ Also (i) $\iff$ (ii)

Betrachte $Q^* \cdot Q = (r_{ij})_{i,j}$ .Dann gilt:

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^* \cdot q_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \overline{q}_{ki} \cdot q_{kj} = \overline{q}_{\cdot,i} \cdot q_{\cdot,j} = \langle q_{\cdot,j}, q_{\cdot,i}\rangle$$

Also $Q^* \cdot Q = E_n \iff r_{ij} = \delta_{ij} \iff \langle q_{\cdot,j}, q_{\cdot,i}\rangle = \begin{cases}0 & i \neq j\\ 1 & i = j\end{cases}$

Satz 14.14 (QR-Zerlegung)

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit vollem Spaltenrang n lässt sich schreiben als $A = Q \cdot R$, wobei die Spalten von $Q \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ein Orthonormalsystem bilden und $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine obere $\triangle$ Matrix.

<u>Beweis:</u> Seien $s_1, s_2, \dots, s_n$ die Spalten von A. Wegen $\mathrm{rank}(A) = n$, bildet $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ Basis des Spaltenraum $U = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Wende Gram-Schmidt an auf $(s_1, s_2, \dots, s_n)$

$s_1 = \|s_1\| \cdot q_1 \qquad Q = \overbrace{(q_1, q_2, \dots, q_n)}^{\text{ONB von } U} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$s_2 = \langle s_2, q_1\rangle q_1 + \|q_2'\| q_2$

$\vdots$

$s_n = \langle s_n, q_1\rangle q_1 + \langle s_n, q_2\rangle q_2 + \dots + \langle s_n, q_{n-1}\rangle q_{n-1} + \|s_n\| q_n$

Setze $R := \begin{pmatrix} \|s_1\| & \langle s_2, q_1\rangle & \cdots & \langle s_n, q_1\rangle \\ 0 & \|q_2'\| & \ddots & \langle s_n, q_2\rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \|q_n'\| \end{pmatrix} \Rightarrow A = Q \cdot R$

$\square$

Aufgabe 14.15: Ist die QR-Zerlegung stets eindeutig?

Bemerkung 14.16

Aus Satz 14.14 folgt für $m = n$ insbesondere, dass sich jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ schreiben lässt als das Prdukt einer orthogonalen/unitären Matrix und einer oberen $\triangle$-Matrix.

Beispiel 14.17

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \end{array}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|s_1\| = 2$

$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|q_2'\| q_2 = s_2 - \langle s_2, q_1\rangle q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|q_2^{'}\| = 1$

$$q_3^{'} = s_3 - \langle s_3, q_1\rangle q_1 - \langle s_3, q_2\rangle q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

15. Exkurs: Spiegelungsgruppen

Für $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $a = (\cos\gamma, \sin\gamma) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\|a\| = 1$

Bezgl Standardbasis hat die Spiegelung s_a aus Bsp. 14.6

die Matrix $[s_a] = \begin{pmatrix} 1-\cos^2\gamma & -2\cos\gamma\sin\gamma \\ -2\cos\gamma\sin\gamma & 2\cos^2\gamma - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\gamma) & -\sin(2\gamma) \\ -\sin(2\gamma) & \cos(2\gamma) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(2\gamma+\pi) & \sin(2\gamma+\pi) \\ \sin(2\gamma+\pi) & -\cos(2\gamma+\pi) \end{pmatrix}$

Betrachtet man zwei Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta) \\ -\sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$Drehung um Winkel $\alpha - \beta$

Bemerkung 15.1

Alle verwendeten trigonometrischen Identitäten folgen aus

$e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma \Rightarrow \sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} \cdot e^{-i\beta} - e^{-i\alpha} \cdot e^{i\beta}\right)$

$= \frac{1}{2i}((\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) - (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta))$

$\vdots$

Rest bleibt dem Leser als Übung überlassen ;-)

Beispiel 15.2

Betrachte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\sigma_1 := s_{(1,0)}$

$\sigma_2 := s_{\frac{1}{2}(-1,\sqrt{3})}$

$\Rightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2$ Drehung um $\pi + \frac{\pi}{3}$

$\mathrm{Ord}(\sigma_1, \sigma_2) = 3$

Kapitel 8 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Definitionen und Beispiele

Sei V ein endlich-dimensionaler VR über einem Körper K. Sei $\varphi : V \to V$ K-linear.

Definition 1.1

Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von φ, falls ex. $v \in V \setminus \{0\} : \varphi(v) = \lambda \cdot v$.
Und v heißt Eigenvektor von φ bzgl. λ.

Der Unterraum $V_\lambda := V_\lambda(\varphi) := \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$
$\iff \varphi(v) - \lambda v = 0 \iff (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0$
heißt Eigenraum von φ bzgl. λ.
Die Dimension $d_\lambda := \dim_K V_\lambda \geq 1$, heißt geometrische Vielfachheit von λ.

Bemerkung 1.2

Eigenwerte linearer Abbildung treten in der Physik auf.
z.B. als Eigenfrequenzen schwingfähiger Systeme.

Definition 1.3

Eine lineare Abbildung heißt diagonalisierbar, falls V eine Basis aus Eigenvektoren(zu möglicherweise versch. EW) von φ besitzt.
$\iff$ ex Basis $\mathcal{B}$ von V so dass
$[\varphi]_\mathcal{B} = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_{\lambda_1}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{d_{\lambda_2}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{d_{\lambda_r}})$
wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von φ sind.

Beispiel 1.4

Sei $V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$. Sei G eine Gerade aus $\mathbb{R}^2$ durch 0.
Wähle ONB (v, w) derart, dass $\mathrm{lin}_\mathbb{R}(v) = G$.

Sei $\sigma = s_w$ die orthogonale Spiegelung an G.
$\Rightarrow \sigma(w) = -w, \sigma(v) = v$

Also ist w Eigenvektor zum Eigenwert -1 und v ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.
$\Rightarrow [\sigma]_{(v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, -1)$
d.h. σ diagonalisierbar.

Beispiel 1.5
Sei wiederrum G Ursprungsgerade in $\mathbb{R}^2$.
Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion auf G.
Wähle ONB (v, w) wie oben.
$\Rightarrow \pi(v) = v,\ \pi(w) = 0$
$[\pi]_{(v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
v ist Eigenvektor zum Eigenwert 1
w ist Eigenvektor zum Eigenwert 0
π diagonalisierbar.

Beispiel 1.6
Sei $\gamma \in (0, \pi)$ und ϱ Drehung um den Winkel γ in $\mathbb{R}^2$.
$[\varrho] = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$
Dann besitzt ϱ <u>keinen</u> EW in $\mathbb{R}$:
Angenommen es ex ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$ mit
$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\gamma - \lambda & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$
aus $x \neq 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \cos\gamma - \lambda & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma - \lambda \end{pmatrix} = \cos^2\gamma + \lambda^2 - 2\lambda\cos\gamma - \sin^2\gamma$
$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\gamma + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \cos\gamma \pm \sqrt{\cos^2\gamma - 1} \Rightarrow \cos^2\gamma = 1$
Widerpsruch, da $\gamma \neq 0$ und $\gamma \neq \pi$.

Bemerkung 1.7
Es gilt: λ ist Eigenwert von $\varphi \iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$

$\iff \underbrace{\ker(\varphi - \lambda\mathrm{id})}_{\lambda v} \neq \{0\}$

Außerdem gilt:

v ist Eigenvektor zu λ von $\varphi \iff v \in \ker(\varphi - \lambda\mathrm{id}) \setminus \{0\}$.

Satz 1.8 (Charakteristische Gleichung)

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim_K V < \infty$. Das Skalar $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von φ, wenn $\det(\varphi - \lambda\mathrm{id}) = 0$.

Beweis: λ Eigenwert von $\varphi \iff \ker(\varphi - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\}$

$\iff (\varphi - \lambda\mathrm{id})$ nicht injektiv $\iff (\varphi - \lambda\mathrm{id})$ nicht bijektiv $\iff \det(\varphi - \lambda\mathrm{id}) = 0$

Definition 1.9

Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von M, falls λ Eigenwert von $\varphi_M : K^n \to K^n : v \mapsto Mv$

Analog für Eigenvektoren.

Beispiel 1.10

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Dann ist $\det(\varphi_A - \lambda E_2)$

$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$

Beispiel 1.11

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Die characteristische Gleichung ist dann:

$\det(\varphi_A - \lambda E_2) = \lambda^2 + 1$

Also sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ Eigenwerte von A.

Berechne passende Eigenvektoren durch lösen der LGS:

$0 \neq v_1 \in \ker(A - \lambda_1 E_2)$ und $0 \neq v_2 \in \ker(A - \lambda_2 E_2)$

$\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Überprüfe: $Av_1 = iv_1$, *d.h.* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Für $\lambda_2 = -i$ ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

Da v_1 und v_2 lin unabh. sin, bilden sie eine Basis B von $\mathbb{C}^2$.
Damit ist
$[\varphi_A]_B^B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
Also ist φ_A diagonalisierbar.

Bemerkung 1.12

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit reellen Einträgen.
Falls v Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, so ist $\overline{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$, denn aus $Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \iff A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$

Beispiel1.13

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3 \times 3}$

$\det(A - \lambda \mathrm{id}) = ...$
Wende Regel von Sarrus an:
$\det(A - \lambda \mathrm{id}) = 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2$

$\rightsquigarrow \lambda = 1$ ist Eigenvalue
Eigenvektor $v_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{tr}}$

2. Diagonalisierbarkeit von Matrizen

Satz 2.1

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_r$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig.

<u>Beweis:</u> Beweis per Induktion über r. Für $r = 1$ gilt $\{v_1\} \neq 0$, also ist $\{v_1\}$ linear unabhängig. Wir nehmen an, dass $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$

lin. unabh. sind. Seien $\mu_i \in K$ mit $\mu_1 v_1, \mu_2 v_2, \ldots, \mu_r v_r = 0$ $(*)$
Nach Anwendung von φ erhält man:
$\varphi(\mu_1 v_1) + \varphi(\mu_2 v_2) + \ldots + \varphi(\mu_r v_r) = 0$
$\lambda_1 \mu_1 v_1, \lambda_2 \mu_2 v_2, \ldots, \lambda_r \mu_r v_r = 0$ (**)
Zieht man das λ-Fache von (*) von (**) ab, so erhält man:
$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_r)\, v_1 + \mu_2\,(\lambda_2 - \lambda_r)\, v_2 \ldots + \mu_r(\lambda_r - \lambda_r) v_r = 0$
Da $\{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$ lin. unabh. sind laut $I.V.$ folgt:
$\mu_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)}_{\neq 0} v_1 + \mu_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_r)}_{\neq 0} v_2 \ldots + \mu_{r-1} \underbrace{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)}_{\neq 0} v_{r-1} = 0$
da $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$
$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{r-1} = 0$
Da $v_r \neq 0$ ist auch $\mu_r = 0$ also ist $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabh..

Korollar 2.2
Eigenräume $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$
schneiden sich nur an der 0, d.h. $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

Korollar 2.3
Sei $\dim_K V = n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise vescheidene Eigenwerte von
$\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Wenn $d_{\lambda_1} + d_{\lambda_2} + \ldots + d_{\lambda_r} = n$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis: Seien $\left\{b_{i,1}, \ldots, b_{i,d_{\lambda_i}}\right\} \subseteq V_{\lambda_i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$
Basen der Eigenräume V_{λ_i}. Dann ist
$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_r} \subseteq V$.

Nach Korollar 8.2.2 ist diese Summe direkt und es gilt:
$\dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^{r} d_{\lambda_i} = n$
Also ist $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$ und
$B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ mit $B_i = \left\{b_{i,1}, \ldots, b_{i,d_{\lambda_i}}\right\}$ eine
Basis von V. Insbesondere sind alle $b_{i,j}$ Eigenvektoren
und die darstellende matrix von φ bzgl. B ist.

$$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_r \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = d_{\lambda_i}$$

3. Wiederholung Polynome

Sei K ein Körper.

▷ Ein Polynom p mit Koeff. in K ist eine Abbildung.

$p : \mathbb{N} \to K$

mit $\#\{i \mid p(i) \neq 0\} < \infty$

▷$(K[t], +, \cdot)$ ist eine K-Algebra der Polynome in dieser unbestimmten t. Da $\{1, t, t^2, ...\}$ lin. unabh. sind, ist $\dim_K K[t] =< \infty$

▷ Zu jedem Polynom $p \in K[t]$ gibt es eine Einsetzungasbbildung

$p^* : K \to K, x \mapsto p^*(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_d x^d$.

▷ d heißt Grad von p.

▷ $K[t]$ ist ein nullteilerfreier Ring: $\forall p, q \in K[t] \setminus \{0\},\ p, q \neq 0$

weil $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$

▷ Für eine Nullestelle $\lambda \in K$ von p, also $p^*(\lambda) = 0$, gilt:

$(t - \lambda)$ teilt p

$\Rightarrow$ Jedes Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen.

▷ Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom in $\mathbb{C}[t]$ vom Grad ≥ 1 besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

$\iff$ Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 zerfällt in Linearfaktoren.

Definition 3.1

Seien $a \in K[t]$ und $\lambda \in K$, so dass $a = (t - \lambda)^s \cdot b$ für $b \in K[t]$ und $b^*(\lambda) \neq 0,\ s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Dann heißt λ s-fache Nullstelle von α.

Vielfachheit der Nullstelle λ

Bemerkung 3.2
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms $a \in K[t]$ mit Vielfachheiten $s_1, s_2, \dots, s_r$.
Dann ex. eindeutig $b \in K[t]$ mit
$a = (t-\lambda_1)^{s_1}(t-\lambda_2)^{s_2}\cdots(t-\lambda_r)^{s_r}b$

4. Das charakteristische Polynom einer Matrix

8.4.1 Definition und Beispiele

Sei $A \in K^{n\times n}$ quadratische Matrix mit koeffizienten in einem Körper K.

Definition 4.1 Der Ausdruck
$\chi_A(t) = \det(A - tE_n)$
heißt charakteristisches Polynom vom A.

Beispiel 4.2 [vgl. Bsp. 8.1.6]
Sei $K = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$ für $\gamma \in (0, \pi)$

Dann ist $\chi_A(t) = \det(A - tE_2) = \begin{vmatrix} \cos\gamma - t & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma - t \end{vmatrix}$
$= (\cos\gamma - t)^2 + \sin^2\gamma$
$= \cos^2\gamma - 2\cos\gamma t + t^2 + \sin^2\gamma = 1 - 2\cos\gamma t + t^2$

Beispiel 4.3
Sei nun K beliebig und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2x2}$ ebenfalls beliebig.

$\chi_A(t) = \det(A - tE_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{vmatrix}$
$= (a_{11} - t)(a_{22} - t) - a_{12}a_{21} = \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det(A)} - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\mathrm{trace}(A)}t + t^2$

Satz 4.4
Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$: $\mathrm{trace}(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ Spur von A.

Satz 4.5
Das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ ist ein Polynom in t vom Grad n.
Es gilt:
$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{trace}(A))t^{n-1} + ... + \det(A)$.
Beweis: Leibnitzformel 5.4.4 - für die Determinante:
$\chi_A(t) = (a_{11} - t)\,(a_{22} - t) \cdots (a_{nn} - t)$
+Produkte mit Vorzeichen, in denen höchstens $n - 2$
Faktoren $(a_{ii} - t)$ auftreten.

$$= (-1)^n t^n + \underbrace{(-1)^{n-1}(a_{11} + ... + a_{nn})t^{n-1}}_{=\mathrm{trace}(A)} + ... + \det(A)$$

□

Bemerkung 4.6(Lebenswichtig)
Wir haben die Leibnitzformal angewendet auf eine Matrix, deren Koeffizienten in dem Ring $K[t]$ liegen. Aber der Ring $K[t]$ ist nullteilerfrein daher eingebettet in seinen Quotientenkörper $K(t)$, den Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in K.

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.
λ EW von A :
ex. $v \in V \setminus \{0\} : \; Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \iff \chi_A^* = 0$

Aus $\deg(\chi_A) = u$ folgt (wiederum), dass A höchstens n EW besitzt.

Definition 4.7
Sei λ Eigenwert der Matrix A. Dann heißt die Vielfachheit der Nullstelle λ in χ_A die algebraische Vielfachheit von λ.

Proposition 4.8

Für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Beweis: ÜA

Beispiel 4.9

Sei $K = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Dann ist $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2$,

und 1 ist die einzige Nullstelle(mit Vielfachheit 2) zur Bestimmung von Eigenvektoren betrachten LGS

$(A - 1E_2)v = 0 : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$, d.h. Lösungsraum $= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 1, $\dim_{\mathbb{R}}(V_1) = 1$

geometrische Vielfachheit $= 1$.

Satz 4.10

Die Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann über K diagonalisierbar, wenn $\chi_A \in K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$\chi_A = (-1)^n \, (t-\lambda)^{e_1}(t-\lambda)^{e_2} \cdots (t-\lambda)^{e_r}$

und falls für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit e_i mit der geometrischen übereinstimmt.

Beweis: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen EW von A mit geometrischen Vielfachheit $d_1, d_2, \ldots, d_r$.

$$A' := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}\right\} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \left.\begin{matrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{matrix}\right\} d_r \end{pmatrix}$$

Spalten vom $S =$ Eigenvektoren

Dann ist $\chi_A(t) = \det(A - tE_n) = \det(SA'S^{-1} - tE_n)$

$= \det(SA'S^{-1} - tSE_nS^{-1})$
$= \det(S(A' - tE_n)S^{-1})$
$= \det(A' - tE_n) = \chi_{A'}(t) = (\lambda_1 - t)^{e_1} \cdots (\lambda_r - t)^{e_r}$
Es gilt: $d_i = e_i \forall i$

Bemerkung 14.4
Diese Rechnung zeigt auch, dass ähnliche Matrizen das selbe charakteristische Polynom haben.

Sei umgekehrt $\chi_A = (\lambda_1 - t)^{e_1} \cdots (\lambda_r - t)^{e_r}$ und $e_i = d_i \forall i$
Dann ist $n = \deg\chi_A = e_1 + ... + e_r = d_1 + ... + d_r$

Also ist A diagonalisierbar.
□

4. Exkurs: das Page-Rank-Verfahren von Google

Sergej Bruin & Lawrence Page:
The anatomy of a large scale hypertextual web search engine ->Wikipedia
Maß für wichtigkeit einer Webseite=Zeitanteil den der zuf. Surfer auf der Seite verbringt.

Idee: Modell "zufälliger Web-Surfer"
•Start mit *zufälliger* Seite *(gleichverteilung)*
•Klicke auf ausgehende Links (zufällig)
•Falls eine Seite keine Links hat: Erfinde künstliche zusätzliche Seite σ, so dass jede Seite nur ohne Links auf σ verweist und σ verweist auf jede Seite ein Netz.
•Zusätzlich: "Dämpfungsfaktor" d mit $0 \leq d \leq 1$
d : Wahrscheinlichkeit, dass der Surfer weiterklickt(über Links) zufällig von vorn anfängt
$1 - d =$———————"———————
empirisch $d = 0,85$

Betrachte WWW*: $\begin{matrix} A & \rightarrow & B \\ \updownarrow & \swarrow & \\ C & \leftrightarrow & D \end{matrix}$

(hier: gerochteter Graph mit Weg von jeder Seite zu jeder Anderen)

$\mathrm{Pr}_t(X)$: Wahrscheinlichkeit, dass Surfer sich zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ auf der Seite X aufhält

$\mathrm{Pr}_0(A) = \mathrm{Pr}_0(B) = \mathrm{Pr}_0(C) = \mathrm{Pr}_0(D) = \frac{1}{4}$

Im nächsten Schritt kann z.B. die Seite C über A, B oder D erreicht werden.

$\mathrm{Pr}_{t+1}(C) = \frac{\mathrm{Pr}_t(A)}{2} + \frac{\mathrm{Pr}_t(B)}{1} + \frac{\mathrm{Pr}_t(D)}{1}$

(ohne Dämpfung)(*)

$\mathrm{Pr}_1(C) = \frac{\mathrm{Pr}_0(A)}{2} + \frac{\mathrm{Pr}_0(B)}{1} + \frac{\mathrm{Pr}_0(D)}{1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} = 0,625$

Für Webseiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ entsteht das folgende Schema:

$\mathrm{Pr}_{t+1}(p_k) = \frac{1-d}{n} + d \cdot \sum\limits_{p_i \in M(p_k)} \frac{\mathrm{Pr}_t(p_i)}{l(p_i)}$

$M(p_k) = \{$Seiten die einen Link auf p_k haben$\}$

$l(p_i) =$#Links auf seite p_i

$\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Pr}_t(X) =: \mathrm{Pr}(X)$ existiert

Beispiel $M(A) = \{C\},\ M(B) = \{A\}, M(C) = \{A, B, D\}, M(D) = \{C\}$.
und $l(A) = 2, l(B) = 1, l(C) = 2, l(D) = 1$

Setze $R := \begin{pmatrix} \mathrm{Pr}(p_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Pr}(p_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Dann gilt: $R = \begin{pmatrix} (1-d)/n \\ \vdots \\ (1-d)/n \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix} \cdot R$

Wieder: $d = 1$

$S = (s_{ki}), s_{ki} := \begin{cases} 1/l(p_i) \text{ falls } p_i \in M(p_k) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

D.h. $S \cdot R = 1 \cdot R$, *d.h.* R ist ein Eigenvektor der Matrix S zum Eigenwert

Wichtige Eigenschaft von $S: \forall i \in \{i, \dots, n\} \cdot \sum_{k=1}^{n} s_{ki} = l(p_i) \cdot \frac{1}{l(p_i)} = 1.$

wobei $s_{ki} \geq 0$.
D.h. S ist <u>stochastisch</u>

$$S = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \\ \begin{array}{cccc} {\scriptstyle A} & {\scriptstyle B} & {\scriptstyle C} & {\scriptstyle D} \end{array} & \end{array}$$

Die Bedingung (*) ist äquivalent dazu, dass die
Matrix S den Eigenwert 1 besitzt.
In unserem Beispiel ist der Eigenraum 1-dimensional

z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_1 \quad R = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 1/9 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix} \rightarrow$ Reihenfolge : $\begin{array}{c} C \\ A, D \\ B \end{array}$ $\leftarrow$ besser als B, da von wichtigeren Seite C verlinkt

Will man die Dämpfung einbeziehen, so ergibt es sich,
dass (**) äquivalent zu:

$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (1-d)/n & ds_{11} & \cdots & ds_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-d)/n & ds_{n1} & \cdots & ds_{nn} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix}$$

d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW 1 der modifizierten Matrix
<u>Homogenisierung</u>

Korollar 3.15

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert von$A$ die algebraische und die geometrischen Vielfachheit übereinstimmen.

<u>Beweis:</u> Folgt aus Satz 3.13 und dem Fundamentalsatz der Algebra

Korollar 3.16

Jede komplexe Matrix besitzt(mindestens) einen Eigenwert.

Definition 3.17

Die <u>Begleitmatrix</u> des normierten Polynoms
$p(t) = a_0 + a_1t^1 + a_2t^2 + ... + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$
ist $C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$

Satz 3.18

Das charakteristische Polynom von C_p ist
$\det(C_p - tE_n) = (-1)^n p(t)$
<u>Beweis:</u> durch vollständige Induktion nach n.
IA: $n = 1$ ✓
IV: die Behauptung gelte für alle Polynome vom Grad$<n$.
Durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte von C_p erhält man die Begleitmatrix des Polynoms
$a_1 + a_2t + a_3t^2 + ... + a_{n-1}t^{n-2} + t^{n-1} =: q(t)$

Entwicklung nach der ersten Spalte:
$\det(C_p - tE_n) = -a_0 \cdot (-1)^{n-1} + (-t)(-1)^{n-1} \cdot q(t)$
$= (-1)^n \underbrace{(a_0 + t \cdot q(t))}_{=p(t)}$
□

5. Der Satz von Cayley-Hamilton

Zusätzlich zur Auswertungsabbildung in K hatten wir in §6.4 einem

Polynom $a = a_0 + a_1 t + ... + a_m t^m \in K[t]$ eine zweite Auswertungsabbildung
$a^* : K^{n\times n} \to K^{n\times n} : M \mapsto a_0 E_n + a_1 M + ... + a_m M^m$

Bemerkung 5.1

Die Abbildung $\varphi_M : K[t] \to K^{n\times n} : a \to a^*(M)$ ist eine K-Algebra Homomorphismus.

Beispiel 5.2

Betrachte $a = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \in \mathbb{R}[t]$
und $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\Rightarrow a^*(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(5.1)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

Bemerkung

Der Ring $K[t]$ nullteilerfrei, aber $K^{n\times n}$ nicht(für n>1)
Es gilt $\forall \lambda \in K : a^*(\lambda E_n) = a^*(\lambda) \cdot E_n$

Satz 5.3(Cayley-Hamilton)

Sei $\in K^{n\times n}$. Dann gilt: $\chi_M^*(M) = 0$

<u>Wdh.:</u> Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist [Laplace]

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-a)^{i+j} \alpha_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \qquad A = (\alpha_{ij}) \text{ mit}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & | & \alpha_{1n} \\ -- & + & -- \\ a_{n1} & | & \alpha_{nn} \end{pmatrix} i \in K^{(n-1)\times(n-1)}$$

Setze $\alpha'_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$
Die Matrix $\text{adj}(A) := A^{\#} = \left(\alpha'_{ij}\right)_{ij} \in K^{n\times n}$
heißt <u>Adjunkte</u> von A. Es gilt nach Prop 5.7.1
$\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot E_n$

Beweis des Satzes von C-H:
Es gilt: $(*)\ \mathrm{adj}(M - tE_n) \cdot (M - tE_n) = \det(M - tE_n)E_n$
Die Koeffizienten der Matrix $\mathrm{adj}(M - tE_n)$ sin Polynome
in t vom Grad $\leq n - 1$ mit Koeffizienten in K.
Also existieren Matrizen $B_0, B_1, ..., B_{n-1} \in K^{n\times n}$, so dass
$\mathrm{adj}(M - tE_n) = B_0 + B_1t + ... + B_{n-1}t^{n-1}$

EInsetzen in * und Koeffizientenvergleich liefert die folgenden
Gleichungen in $K^{n\times n}$

$$(**) \begin{cases} B_0M = a_0E_n & |\cdot E_n \\ B_1M - B_0 = a_1E_n & |\cdot M \\ B_2M - B_1 = a_2E_n & |\cdot M^2 \\ \vdots & \vdots \\ B_{n-1}M - B_{n-2} = a_{n-1}E_n & \\ -B_{n-1} = (-1)^nE_n & \end{cases} \qquad \text{für } \chi_M(t) = a_0 + a_1t + ... + a_{n-1}t^{n-1} + (-1)^nt^n$$

Multipliziere von rechts erste Gleichung in (**) mit E_n,
zweite Gleichung mit M, dritte Gleichung mit $M^2, ...,$
der n-ten mit M^{n-1} und summiere auf.
$0 = a_0E_n + a_1M + a_2M^2 + ... + a_{n-1}M^{n-1} + (-1)^nM^n$
$= \chi_M^*(M)$
□

Satz 5.4(Satz vom Minimalpolynom)
Für jede Matrix A existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom μ_A
minimalen Grades mit Leitkoeff.=1, sodass
$\mu_A^*(A) = 0$
Das Polynom μ_A heißt Minimalpolynom von A.

Beweis: Nach Satz 5.3 gilt: $\chi_A^*(A) = 0$ und der Leitkoeffizient von χ_A
ist $(-1)^n$. χ_A ein Polynom mit der gewünschten Eigenschaft und
minimalem Grad d.

Um die Eindeutigkeit zu zeige, nehme an es existieren $\mu, \nu \in K[t]$

mit $\mu = \mu_0 + \mu_1 t + ... + \mu_{d-1} t^{d-1} + t^d$ und
$\nu = \nu_0 + \nu_1 t + ... + \nu_{d-1} t^{d-1} + t^d$
und $\mu^*(A) = 0 = \nu^*(A)$
$\Rightarrow (\mu - \nu)^*(A) = 0$ aber deg $\mu - \nu < d$
Widerspruch zur minimalität von d
$\square$

Bemerkung 5.5

Die Existenz annulierender Polynome (d.h. zu $F \in \mathrm{End}(V)$ ist ein Polynom annulierend, falls $p(F) = 0$) zu linearen Abbildungen ist nur in endlich dim. VRäumen gegeben.
Gegenbeispiel: $V = \ell^2$ mit mit F rechtsshift.

Satz 5.6

Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom.
Beweis: Seien $A, B \in K^{n \times n}$ und $S \in \mathrm{GL}(K^n)$ mit $B = SAS^{-1}$. Für A sei das Minimalpolynom $\mu_A = a_0 + a_1 t + ... + \underset{=1}{a_n} t^n \in K[t]$
Es gilt: $\mu_A^*(B) = a_0 E_n + a_1 B + a_2 B^2 + ... + a_{d-1} B^{d-1} + B^d$
$= a_0 SS^{-1} + a_1 SAS^{-1} + a_2 (SAS^{-1})^2 + ... + (SAS^{-1})^d$
$= a_0 SS^{-1} + a_1 SAS^{-1} + a_2 SA^2 S^{-1} + ... + SA^d S^{-1}$
$= S\big(a_0 E_n + a_1 A + ... + A^d\big) S^{-1}$
$= S \underbrace{\mu_A^*(A)}_{0 \in \mathrm{End}(V) \cong K^{n \times n}} S^{-1} = 0$

Nach Satz 8.4.5 gilt deg$\mu_A \geq$ degμ_B.
Analog folgt aus $\mu_B^*(A) = 0$, dass deg$\mu_B \geq$ degμ_A
$\Rightarrow$ deg$\mu_A =$ degμ_B
$\square$

Satz 5.7

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann haben χ_A und μ_A dieselben Nullstellen.
Beweis: HA

Beispiel 5.8

Betrachte die folgende Matrix:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Das charakteristische Polynom von A ist

$\chi_A = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ -1 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)((1-t)(3-t)+1) = (2-t)(3-t-3t+t^2+1)$

$= (2-t)(4-4t+t^2) = (2-t)^3$

Die möglichen Minimalpolynome sind:

$\mu_A = \{(2-t), (2-t)^2, (2-t)^3\}$

Um zu überprüfen, welches das Minimalpolynom ist, berechne:

$(2-t)^*(A) = 2E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$((2-t)^2)^*(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_A = (2-t)^2$

6. Diagonalisierung normaler Matrizen

In diesem Abschnitt betrachten wir $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(\mathbb{K}^n, \langle.\,,.\rangle)$
der euklidische/unitäre VR mit dem Standardskalarprodukt.

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

die komplex konjugierte Matrix und

$$A^* = \overline{A}^{\mathrm{tr}} = (\overline{a_{ji}})$$

Die Adjungierte von A.

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $A^* = A^{\mathrm{tr}}$

Für die Adjungierte gelten folgende Rechenregeln:

•$(A+B)^* = A^* + B^*$

$\bullet(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
$\bullet(AB)^* = B^* A^*$
$\bullet(A)^{**} = A$

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt:
$\bullet$<u>symmetrisch</u> falls $A = A^{\text{tr}}$
$\bullet$<u>schiefsymmetrisch</u> $A^{\text{tr}} = -A$
$\bullet$<u>hermitesch</u> $A = A^*$
$\bullet$<u>schiefhermitesch</u> $A = -A^*$

Beispiel 6.1

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 2 & 2+i \\ 1+i & 2-i & -2 \end{pmatrix}$ ist hermitesch.

Lemma 6.2

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + \overline{A})}_{\text{Realteil(Re}(A))} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - \overline{A})}_{\text{Imaginärteil(Im}(A))}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^{\text{tr}})}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^{\text{tr}})}_{\text{schiefsymmetrisch}}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^*)}_{\text{hermitesch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^*)}_{\text{schiefhermitesch}}$$

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:

$\bullet\ \langle Av, w \rangle = (Av)^{\text{tr}} \overline{w} = v^{\text{tr}} A^{\text{tr}} \overline{w} = v^{\text{tr}} \overline{\overline{A}^{\text{tr}} w} = \langle v, A^* w \rangle$

$\bullet\langle v, Aw \rangle = v^{\text{tr}} \overline{Aw} = v^{\text{tr}} \left(\overline{A}^{\text{tr}}\right)^{\text{tr}} \overline{w} = \langle A^* v, w \rangle$

Definition 6.4

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt <u>normal,</u> falls
$AA^* = A^* A$

Beispiel 6.5

(i) unitäre Matrizen sind normal. $AA^* = A^*A = E_n$

(ii) Reelle orthogonale Matrizen sind normal.

(iii) Diagonalmatrizen sind normal

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht normal.

(v) hermitesche und schiefhermitesche Matrizen sind normal.

(vi) Reelle symmetrische & schiefsymmetrische Matrizen sind normal.

Lemma 6.8

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal.

Dann ist:

i) $A - \lambda E_n$ normal

ii) Q^*AQ ist normal für $Q \in U_n\mathbb{C}$.

<u>Beweis:</u> Es gilt:

$(A - \lambda E_n)(A - \lambda E_n)^* = (A - \lambda E_n)\big(A^* - \overline{\lambda}E_n\big)$

$= AA^* - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + \lambda\overline{\lambda}E_n$

da A normal

$\rightsquigarrow = A^*A - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + \lambda\overline{\lambda}E_n$

$= \big(A^* - \overline{\lambda}E_n\big)(A - \lambda E_n) = (A - \lambda E_n)^*(A - \lambda E_n)$

ii) viel einfacher

Das eukl./unitäre Skalarprodukt ist positiv definit.

Die bedeutet für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von $A \iff Av - \lambda v = 0 \iff \|Av - \lambda v\| = 0$

Lemma 6.7

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal.

$\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A mit zugeh. Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Dann ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A^* mit demselben Eigenvektor.

<u>Beweis:</u> Für beliebige $\mu \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$\|Aw - \mu w\|^2 = \langle Aw - \mu w, Aw - \mu w\rangle$

$= \langle (A - \mu E_n)(w), (A - \mu E_n)(w)\rangle$

$= ((A - \mu E_n)^*(A - \mu E_n)w, w)$

$= \langle (A - \mu E_n)(A - \mu E_n)^* w, w \rangle$
$= \langle A^* w - \overline{\mu} w, A^* w - \overline{\mu} w \rangle = \|A^* w - \overline{\mu} w\|^2$
$\Rightarrow$Folgt die Beh.

Proposition 6.8

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch. Dann sind alle (komplexen) Eigenwerte reell.
Insbesondere sind die (komplexen) Eigenwerte einer reellen
symmetrischen Matrix immer reell.

Beweis: sEI λ Eigenwert von A. Wähle Eigevektor $v \in \mathbb{C}^n$
$\Rightarrow \lambda v = Av \underset{\text{herm.}}{=} A^* v \underset{6.7}{=} \overline{\lambda} v \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Bemerkung 6.9

Komplexe symmetrische MAtrizen können auch nicht-reelle
Eigenwerte haben z.B.
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$

Lemma 6.10

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal. Dann sind Eigenvektoren zu verschiedenen
Eigenwerten orthogonal.

Beweis: Seien v, w Eigenvektoren von A bzgl. Eigenwerten λ bzw μ.
$\Rightarrow \lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle \underset{6.7}{=} \langle v, \overline{\mu} w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$
$\Rightarrow \lambda = \mu \vee \langle v, w \rangle = 0$
$\square$

Lemma 6.11

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal und v Eigenvektor von A(bzgl. eine bel. EW).
Dann gilt: $A(v^{\perp}) \subseteq v^{\perp}$
D.h. der $(n-1)$ dim. UR $v^{\perp} \leq \mathbb{C}^n$ ist invariant unter A.

Beweis: Sei v Eigenvektor zum Eigenwert λ von A und sei
$w \in v^{\perp}$ bel. D.h. $\langle v, w\rangle = 0,\ \text{zu zeigen}:\ \langle v, Aw\rangle = 0.$
$\Rightarrow \langle v, Aw\rangle = \langle A^{*}v, w\rangle = \left\langle \overline{\lambda}v, w\right\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle = 0$
□

Satz 6.12(Hauptsatz über normale Matrizen)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann sind äquivalent:
(i) Die Matrix A ist normal
(ii) Der $\mathbb{C}$-VR $\mathbb{C}^n$ besitzt eine ONB aus EV von A
(iii) Es existiert eine unitäre Matrix $Q \in U_n\mathbb{C}$, so dass $Q^{*}AQ$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis: "(i)⇒(ii)" Sei A normal. nduktion nach n: Für $n = 1$ ist also das charakteristische Polynom linear, der einzige Koeffizient der 1×1 Matrix A ist auch der einzige Eigenwert. Der Vektor $1 \in \mathbb{C}^1$ ist ein Eigenvektor, der eine ONB von $\mathbb{C}^1$ bildet. Sei nun $n > 1$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzt A einen Eigenwert λ_1 mit zugehörigem Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{C}^n$. Œ $\|v_1\| = 1$.
Nun gilt wegen Lemma 6.11, dass $A(v_1^{\perp}) \subseteq v_1^{\perp}$. Das heißt A induziert eine lineare Abbildung auf $v_1^{\perp} \cong \mathbb{C}^{n-1}$(wieder normal). Induktiv können wir annehmen, dass ex. $v_2, ..., v_n \in v_1^{\perp}$ mit $(v_2, \dots, v_n)$ ONB von $v_1^{\perp}$ aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_2, ..., \lambda_n$. Für jeden der paarweise verschiedenen Eigenwerte von A bilde ONB nach Gram-Schmidt. Die Vereinigung der ONB der Eigenräume bildet eine ONB von $\mathbb{C}^n$. Wegen Lemma 6.10.

"(ii)⇒(iii)" Angenommen $\mathbb{C}^n$ hat eine ONB aus Eigenvektoren von A. Dann gilt für die Matrix Q mit den Spalten $v_1, v_2, \dots, v_m$, dass $Q^{-1}AQ$ Diagonalmatrix ist. Es gilt: $Q \in U_n\mathbb{C}$ weil die Spalten eine ONB bilden.(7.14.13)

"(iii)⇒(i)" Sei $Q \in U_n\mathbb{C}$, so dass $D := Q^{-1}AQ$ Diagonalmatrix ist. Also ist $QDQ^{-1} = A$ normal nach Lemma 6.6, weil D normal ist. □

Satz 6.13(Hauptsatz über hermitesche Matrizen)
(i) Die Matrix A ist hermitesch
(ii) Die matrix A ist normal und alle Eigenwerte sind reell
(iii) Es existieren eine unitäre Matrix $Q \in U_n\mathbb{C}$, sodass
Q^*AQ eine reelle Diagonalmatrix ist

<u>Beweis:</u> "(i)⇒(ii)" Sei A hermitesch. Dann wissen wir, dass A normal ist. Alle Eigenwerte von A sind reell nach Proposition 6.8.

"(ii)⇒(iii)" Sei A eine normale Matrix, so dass alle ihre Eigenwerte reell sind. Nach 6.12 existiert unitäre Matrix $Q \in U_n\mathbb{C}$ mit Q^*AQ ist Diagonalmatrix aus Eigenwerten.

"(iii)⇒(i)" Angenommen ex $Q \in U_{n\mathbb{C}}$, so dass $D := Q^*AQ$ reelle Diagonalmatrix ist. Dann ist D hermitesch. Damit ist auch $Q^{-1}DQ = A$ auch hermitesch.

Beispiel 6.14

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist hermitesch. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(t) = \det(A - tE_2) = \begin{vmatrix} 1-t & i \\ -i & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2)$

Also sind 0 und 2 die beiden Eigenwerte von A. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist $\ker(A - \lambda E_2) \underset{\lambda=0}{=} \ker(A)$

z.B. $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$, denn: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

und $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2E_2)$, denn: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -i \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{1} = -1 + 1 = 0.$

$$\left\| \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2} = \left\| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$Q = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in U_2\mathbb{C}$$

$\Rightarrow Q^*AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lemma 6.15
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, deren(komplexe) Eigenwerte alle reell sind. Dann ist A genau dann diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, wenn A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

Beweis: Angenommen A ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. Sei λ EW von A.
$\Rightarrow A - \lambda E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Es gibt $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(A - \lambda E_n) = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}}(A - \lambda E_n)$ [wg. Gauß]
$\Rightarrow$ex reelles Erzeugendensystem von $\ker(A - \lambda E_n)$ d.h. der Eigenraum zu λ(als Unterraum von $\mathbb{C}^n$) besitzt eine Basis in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Satz 6.16 [Hauptsatz über reell symmetrische Matrizen]
Für eine $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:
(i) A symmetrisch
(ii) $\mathbb{R}^n$ hat ONB aus Eigenwerte von A
(iii) Ex $Q \in O_n\mathbb{R}$ mit $Q^{\mathrm{tr}}AQ$ (reelle) Diagonalmatrix.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$(ii)" Sei A symmetrisch
$\Rightarrow A$ normal und A ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.
Prop 6.8: alle Eigenwerte von A sind reell.
Lemma 6.15: A ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. D.h. $\mathbb{R}^n$ besitzt eine ONB aus Eigenvektoren von A.

Die restlichen Beweisschritte ergeben sich wie für 6.13.
$\square$

Beispiel 6.17
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist symmetrisch.

Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$

Die beiden Eigenwerte sind 1 und -1. Zugehörige Eigenvektoren sind:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu 1 bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu -1.

Beide Vektoren haben die Länge $\sqrt{2}$. Die Matrix $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ist orthogonal und es gilt: $Q^{\text{tr}}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Lemma 6.18

Sei λ ein Eigenwert der invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{GL}_n K$ über einem bel. Körper K. Sei v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1} mit Eigenvektor v.

<u>Beweis:</u> $Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \Rightarrow \lambda^{-1}v = A^{-1}v$ □

Satz 6.19 [Hauptsatz über unitäre Matrizen]

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) A ist unitär
(ii) A ist normal & Alle Eigenwerte haben den Betrag 1
(iii) Ex. $Q \in U_n\mathbb{C}$, sodass Q^*AQ Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge Betrag 1 besitzen.

<u>Beweis:</u> "(i)⇒(ii)" Sei A eine unitäre Matrix. Dann ist A normal.
Sei λ Eigenwert von A mit Eigenvektor v. Lemma 6.18: λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} mit Eigenvektor v.
$\Rightarrow \lambda^{-1}v = A^{-1}v \underset{A \text{ unitär}}{=} A^*v \underset{6.7}{=} \overline{\lambda}v \underset{v\neq 0}{\Rightarrow} \lambda^{-1} = \overline{\lambda} \Rightarrow |\lambda| = \lambda\overline{\lambda} = 1$

□

Der Rest geht wie der Oben.

Beispiel 6.20

Die Matrix $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist unitär.

Setze $B := 2\sqrt{2}A = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin U_n\mathbb{C}$

$\Rightarrow \chi_B(t) = t^2 - (2+2i)t + 8i$
$= \big(t - \big(1+\sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i\big)\big) \cdot \big(t - \big(1-\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i\big)\big)$
$(1 \pm \sqrt{3}) + (1 \mp \sqrt{3})i$
Es gilt $\left|(1 \pm \sqrt{3}) + (1 \mp \sqrt{3})i\right|^2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$.

Bemerkung 6.21

Die Eigenwerte unitärer Matrizen sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.
Solche komplexe Zahlen lassen sich eindeutig schreiben als
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ für $\varphi \in [0, 2\pi)$
Für jede unitäre Matrix $A \in U_n\mathbb{C}$ ex $Q \in U_n\mathbb{C}$, sodass
$Q^*AQ = \operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_n})$

Bemerkung 6.22

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell und λ Eigenwert von A mit Eigenvektor v.
D.h. $Av = \lambda v$. Durch komplexe Konjugation folgt:
$A\overline{v} \underset{A \text{ reell}}{=} \overline{A}\,\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$
D.h. $\overline{\lambda}$ ist Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$. Falls $v \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$,
Dann sind v und $\overline{v}$ linear unabh. (über $\mathbb{C}$).

Satz 6.23 [Normalform orthogonaler Matrizen]

Es sei $A \in O_n\mathbb{R}$ orthogonal. Dann ex. $Q \in O_n\mathbb{R}$, sodass

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} P & & \\ & N & \\ & & D \end{pmatrix}$$

gibt wobei(p: (algeb.&geom.) Vielfachheit des EW 1,
q:(algeb.&geom.) Vielfachheit des EW -1)
$P = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $N = \operatorname{diag}(-1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{R}^{q\times q}$ und

$$D = \begin{pmatrix} \cos\gamma_1 & -\sin\gamma_1 & & & \\ \sin\gamma_1 & \cos\gamma_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\gamma_r & -\sin\gamma_r \\ & & & \sin\gamma_r & \cos\gamma_r \end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u> Als reelle orthogonale Matrix ist A unitär.

Daher gelten die Konsequenzen aus Satz 6.19.
Insbesondere haben alle komplexen Eigenwerte Betrag 1.
Die nicht reellen Eigenwerte treten in komplex konjugierten Paaren auf,
d.h. die Eigenwerte lassen sich wie folgt anordnen:
$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p \text{ mal}}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{q \text{ mal}}, \underbrace{e^{i\gamma_1}, e^{-i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}, e^{-i\gamma_2}, \ldots, e^{i\gamma_r}, e^{-i\gamma_r}}_{2\ r \text{ mal}}$
mit $\gamma_h \in [0, 2\pi)$

Kapitel 9 Quadratische Formen

1. Definitionen und Beispiele

Sei K ein beliebiger Körper, in dem $2 := 1 + 1 \neq 0$ gilt.
Man sagt, die Charakteristik von K ist ungleich 2. Sei V ein $K-$VR.

Definition 1.1

Eine Abbildung $Q : V \to K$ heißt quadratische Form, falls:
i) $\forall \lambda \in K \forall v \in V : Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$
ii) Die Abbildung $\beta_Q : V \times V \to K : (v, w) \mapsto \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$
ist (symmetrisch und) bilinear Polarform zu Q.

Lemma 1.2

Ist $f : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, sonst
$Q_f : V \to K : v \mapsto f(v, v)$ eine quadratische Form. Es gilt: $\beta_{Q_f} = f$.

Beweis: Seien $v, w \in V, \lambda \in K$ $\ Q_f(\lambda v) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v)$.
$\frac{1}{2}(Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w)) = \frac{1}{2}(f(v + w, v + w) - f(v, v) - f(w, w))$
$= \frac{1}{2}(f(v, v) + f(v, w) + f(w, v) + f(w, w) - f(v, v) - f(w, w)) = f(v, w)$
□

Beispiel 1.3

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das euklidische SKP.
Dann ist $Q_{\langle \cdot, \cdot \rangle} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$
die zugehörige Quadratische Form.

Bemerkung 1.4
Vgl. Lemma 1.2 mit Polarisierungsidentitäten 7.4.6

Bemerkung 1.5
Sei f symmetrische Bilinearform auf $V = K^n$. Dann ist $[f]$ die Matrix f bzgl. der Standardbasis von K^n. Für $v \in K^n$ gilt:
$Q_f(v) = f(v, v) = v^{\mathrm{tr}}[f]v$

Beispiel 1.6
Sei $q = \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} t_i t_j \in K[t_1, t_2, \dots, t_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad 2 in den Unbestimmten $t_1, \dots, t_n$. Dann ist
$Q : K^n \to K : v \mapsto q^*(v) = \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} v_i v_j$
eine quadratische Form.

Aufgabe 1.7
Jede quadratische Form auf K^n ensteht wie in Bsp. 1.6.

2. Hauptachsentransformation

Es sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.1
Es existiert eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^n$ (bzgl. des euklidischen SKP), sodass die Polarform β_Q bzgl. der Basis B Diagonalgestalt $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ hat.

Beweis: Es sei $A = [\beta_Q]$ die Matrix zu β_Q bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.
Nach Satz 8.6.16 ex $S \in O_n\mathbb{R}$, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.
Die Spalten von S bilden die gesuchte Basis B. $\square$

Definition 2.2
Die Menge $\{v \in V \mid Q(v) = 1\}$ heißt Quadraik zu Q.
Notation wie oben. Wegen 1.7 ist diese Quadrik eine (affine) abgeschlossene Hyperfläche im Sinne von Def 6.8.2. $Q(v) - 1 = 0$
Ist $A = [\beta_Q] = a_{ij}$ die symmetrische Matrix zur Polarform β_Q,

so erfüllt ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ auf die Quadrik die Gleichung

(*) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}x_ix_j = 1.$

Es sei $B = (b_1, b_2, \dots, b_i)$ die ONB aus Satz 2.1. Schreiben wir $y = [x]_B = s^{-1}x$, so gilt

(**) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 1$

Die Umwandlung von (*) in (**) +ber Satz 2.1 heißt <u>Hauptachsentransformation</u> von Q. Im einzelnen sind die folgenden Schritte durchzuführen:

(I) Bestimme alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ der Matrix A.
mir ihren algebraischen Vielfachheiten
(ii) Für jeden der paarweise verschiedenen Eigenwerte λ bestimme eine Basis des Eigenraums $\ker(A - \lambda E_n)$ (via Gauß-Jordan)
(iii) Konstruiere aus jeder dieser Basen ein ONB (via Gram Schmidt)
Die Vereinigung all dieser ONB der Eigenräume ist eine ONB von $\mathbb{R}^n$
Die Transformationsmatrix S wird Spaltenweise aus B gebildet.

Danach gilt $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) =: D$ und
$Q(x) = x^{\mathrm{tr}}Ax = (Sy)^{\mathrm{tr}}A(Sy) = y^{\mathrm{tr}}\underbrace{(S^{\mathrm{tr}}AS)}_{D}y$

D.h. S transformiert die Quadrik zu A(bzw. Q) auf die Quadrik in zu D. (kongruent)

Beispiel 2.3

Betrachte die folgende Quadratische Form. $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$
aus $\mathbb{R}^2$ Die Matrix der Polarform ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Das charakteristische Polynom ist $X_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ 3 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 9$
$= t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$

Also sind 4 und -2 die Eigenwerte von A (alg. Vielfachheit 1)
Normierte Eigenvektoren sind
$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Transformationsmatrix ist

$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \in SO_2\mathbb{R}$ (Drehung um 45°)

Die Gleichung (**) sieht so aus:

$4y_1^2 - 2y_2^2 = 1$ transformierte Quadrik.

Satz 2.4(Trägheitssatz von Sylvester)

Es existiert eine Basis C von $\mathbb{R}^n$, so dass die Matrix der Polarform β_Q bzgl. C Diagonalgestalt.

$\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0)$ hat

Beweis: Nach Satz 2.1 ex ein(Orthonormal-)basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ bzgl. der gilt: $[\beta_Q]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

Setze

$$c_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} b_i & \text{falls } \lambda_i > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} b_i & \text{falls } \lambda_i < 0 \\ b_i & \text{falls } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Bis auf Umordnung ist $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ die gewünschte Basis

$$[\beta_Q]_C = \operatorname{diag}(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots,}_{p} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+2}}}, \dots,}_{q} \underbrace{1, \dots, 1}_{r})[\beta_Q]_B \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots\right) = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1,}_{p}\underbrace{-1, \dots,}_{q}$$

3. Klassifikation der Quadriken für n=2

Die Gleichung (**) hat für $n = 2$ also die Form

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1 \ \lambda_{i \in \mathbb{R}} \ (***)$$

Es treten die folgenden Fälle auf:

(i) $\lambda_1 > 0 \& \lambda_2 > 0$. Für $a := \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$ und $b := \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$

wird (***) zu $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Die Quadrik ist eine achsenparallele Ellipse mit Halbachsen a und b.

Speziell: $a = b = 1$

$\Rightarrow$ Quadrik = Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$

Quadrik vor Hauptachsentransformation=gedrehte Ellipse

(ii) $\lambda_1 > 0 \& \lambda_2 < 0$ Für $a := \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$ und $b := \sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}$
wird (***) zu $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$
Die Quadrik ist eine Hyperbel mit den Asymptoten $x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1$
(Beispiel 9.3.2)
(iii) $\lambda_1 \neq 0 \& \lambda_2 = 0$ Die Gleichung (***) vereinfacht sich zu
$\lambda_1 x_1^2 = 1$

Für $\lambda_1 < 0$ keine reelle Lösung. Für $\lambda_1 > 0$ gilt
$x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$. Die Quadrik besteht aus zwei parallelen geraden.

$-\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$

4. Die hamiltonschen Quaternionen

Die Menge der (hamiltonschen) Quaternionen
$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ \overline{-z} & \overline{w} \end{pmatrix} \,\middle|\, w, z \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$
Für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{-b} & \overline{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ \overline{-d} & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ \overline{-b+d} & \overline{a+c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{-b} & \overline{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ \overline{-d} & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ \underbrace{-\overline{b}c - \overline{a}\overline{d}}_{=-\left(\overline{ad+b\overline{c}}\right)} & \underbrace{-\overline{b}d + \overline{ac}}_{=\left(\overline{ac-b\overline{d}}\right)} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Das heißt $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen bzgl. Addition(subtraktion) und Multiplikation, also ein Teilring von $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Wir setzen $1_{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i_{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j_{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k_{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Dann gilt: $i_{\mathbb{H}}^2 = -1_{\mathbb{H}} = j_{\mathbb{H}}^2 = k_{\mathbb{H}}^2$
sowie $i_{\mathbb{H}} \cdot j_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = k_{\mathbb{H}}$
$j_{\mathbb{H}} \cdot i_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -k_{\mathbb{H}}$

$j_{\mathbb{H}} \cdot k_{\mathbb{H}} = i_{\mathbb{H}}$
$k_{\mathbb{H}} \cdot j_{\mathbb{H}} = -i_{\mathbb{H}}$

$i_{\mathbb{H}} \cdot k_{\mathbb{H}} = -j_{\mathbb{H}}$
$k_{\mathbb{H}} \cdot i_{\mathbb{H}} = j_{\mathbb{H}}$

Multiplikation in $\mathbb{H}$ ist nicht kommutativ.

Die Matrixalgebra $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist ein $\mathbb{C}-$ VR(der Dim. 4)
bzw. ein $\mathbb{R}-$ VR(der Dim. 8).
$\lambda\begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda w & \lambda z \\ -\lambda\overline{z} & \lambda\overline{w} \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ w, z \in \mathbb{C}$

D.h. $\mathbb{H}$ ist ein 4-Dimensionaler $\mathbb{R}-$ UVR von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mit Basis
$(1_{\mathbb{H}} i_{\mathbb{H}}, j_{\mathbb{H}}, k_{\mathbb{H}})$. $\mathbb{H}$ reelle Algebra.

Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben als $z = a + bi$
$a + bi \mapsto a \cdot 1_{\mathbb{H}} + b \cdot i_{\mathbb{H}}$.
Bijektion, additiv und multiplikativ. D.h. via dieser Einbettung lässt sich
$\mathbb{C}$ als Teilalgebra von $\mathbb{H}$ auffassen.
Daher kann man einfacher schreiben: $1, i, j, k \in \mathbb{H}$

Man schreibt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

ÜA Die von 0 verschiedenen Quaternionen sind invertierbar, d.h.
$\mathbb{H} \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{C}[\subset \mathrm{GL}_4\mathbb{R}]$.

Satz
die Quaternionen $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ bilden einen Schiefkörper, d.h. es gelten alle
Körperaxione mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

Jede Quaternion u besitzt eindeutige Darstellung.
$u = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot i + u_3 \cdot j + u_4 \cdot k$
Die Abbildung
$\overline{\cdot} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : u \mapsto u_1 \cdot 1 - u_2 \cdot i - u_3 \cdot j - u_4 \cdot k$
Setzt die komplexe Konjugation auf $\mathbb{H}$ fort, $\mathbb{R}$ linear, bijektiv.

Lemma 4.4
Für alle $v, w \in \mathbb{H} : \overline{v \cdot w} = \overline{w} \cdot \overline{v}$ (-Anti-Automorphismus des Schiefkörpers $\mathbb{H}$)

Lemma 4.5
Die Normabbildung $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : u \mapsto u \cdot \overline{u}$ ist eine quadratische Form auf $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ und es gilt $[\beta_n]_{(1,i,j,k)} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$.

Beweis: sei $u \in \mathbb{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann: $N(\lambda u) = \lambda u \cdot \overline{\lambda u} = \lambda u \cdot \lambda\, \overline{u} = \lambda^2 u\, \overline{u} = \lambda^2 N(u)$
Ferner ist $N(u+v) - N(u) - N(v) = (u+v)(\overline{u+v}) - u\,\overline{u} - v\,\overline{v}$
$= u\,\overline{u} + u\,\overline{v} + v\,\overline{u} + v\,\overline{v} - u\,\overline{u} - v\,\overline{v} = u\,\overline{v} + v\,\overline{u}$
sowie $\lambda(u+u')\overline{v} + v\,\overline{\lambda(u+u')} = \lambda u\overline{v} = \lambda u'\overline{v} + v\lambda\,\overline{u} + v\lambda\,\overline{u'}$
$= \lambda(u\,\overline{v} + v\,\overline{u}) + \lambda(u'\overline{v} + v\,\overline{u'})$
$\Rightarrow \beta_N(u,v) = \frac{1}{2}(N(u+v) - N(u) - N(v))$ bilinear

Zur Berechnung der darst. Matrix von β_n bzgl. $(1,i,j,k)$ rechnet man zB.
$\frac{1}{2}\big(i\,\overline{i} + i\,\overline{i}\big) = 1$ und $\frac{1}{2}\big(i\,\overline{j} + j\,\overline{i}\big) = -\frac{1}{2}(ij + ji) = 0$

euklidisches SKP auf $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$

Die Abbildung
$\kappa_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : v \mapsto u^{-1} \cdot v \cdot u$
heißt Konjugation mir $u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Für $u, v, w \in \mathbb{H}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
$\kappa_u(\lambda v + \mu w) = u^{-1}(\lambda v + \mu w)u = \lambda u^{-1} v u + \mu u^{-1} w u$
$= \lambda \kappa_u(v) + \mu \kappa_u(w)$
$\mathbb{R}$-linear und bijektiv.

Beispiel
$\kappa_i(j + 2k) = i^{-1}(j+2k)i = -i(j+2k)i = (-k+2j)i = -j - 2k$
$\kappa_u(1) = u^{-1} 1 u = 1$

Lemma 4.6
Es gilt: $\beta_N(\kappa_u(v), \kappa_u(w)) = \beta_N(v,w)$
für alle $u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ $v, w \in \mathbb{H}$
D.h. κ_u ist orthogonale Abb. bzgl. β_N, $\kappa_u \in O(\mathbb{R}^4)$

<u>Beweis:</u> $2\beta_N(\kappa_u(v), \kappa_u(w)) = \kappa_u(v) \cdot \overline{\kappa_u(w)} + \kappa_u(w) \cdot \overline{\kappa_u(v)}$
$= u^{-1}vu\overline{u^{-1}wu} + u^{-1}wu\overline{u^{-1}vu}$
$= u^{-1}vu\overline{u}\overline{w}\overline{u^{-1}} + u^{-1}wu\overline{u}\overline{v}\overline{u^{-1}}$
$= u^{-1}v\overline{w}u\overline{u}\overline{u^{-1}} + u^{-1}w\overline{v}u\overline{u}\overline{u^{-1}}$
$= u^{-1}v\overline{w}u + u^{-1}w\overline{v}u$
$= u^{-1}(v\overline{w} + w\overline{v})u = \kappa_u(v\overline{w} + w\overline{v}) = v\overline{w} + w\overline{v} = 2\beta_N(v, w)$

Eine Quaternion u heißt <u>rein</u>, falls sie Linearkombination von i, j, k ist.
D.h. $u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k$ ist rein $\iff u_1 = 0$.

Lemma 4.7

$\forall u \in \mathbb{H} \setminus \{0\} : \kappa_u(\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(i, j, k)) \subseteq \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$
<u>Beweis:</u> Die Konjugation ist $\mathbb{R}$-linear und sie respektiert das Skalarprodukt β_N und: $\kappa_u(1) = 1 \Rightarrow 1^{\perp} = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$ ebenfalls invariant unter κ_u. $\square$

Satz 4.8

Die Abbildung
$\kappa : \{u \in \mathbb{H} \mid N(u) = 1\} \to \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3) : u \mapsto \kappa_u$ [Beh. $\kappa_{u \cdot v} = \kappa_u \cdot \kappa_v$]
ist surjektiv & $\kappa(u) = \kappa(v) \iff u = \pm v$

<u>Beweis:</u> Die Quaternionen dr Norm 1 bilden eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{H}$. Dann folgt aus
$N(uv) = (uv)(\overline{uv}) = uv\overline{v}\overline{u} = N(u) \cdot N(v)$.
Bekannt $\kappa_u \in O(\mathrm{lin}(i, j, k))$ Zu zeigen: $\det(\kappa_u) = 1$.
$\Rightarrow \kappa_u \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$

Seien $u, v \in \mathbb{H} \setminus \{0\},\ w \in \mathbb{H}$
$\kappa_{uv}(w) = (uv)^{-1}w(uv) = v^{-1}u^{-1}wuv = v^{-1}\kappa_u(w)v$
$= \kappa_v(\kappa_u(w)) = \kappa_v \circ \kappa_u$

$\kappa' : u \mapsto \kappa_{u^{-1}}$
$v \mapsto uvu^{-1}$
$\kappa'_{uv}(w) = (uv)w(uv)^{-1} = uvwv^{-1}u^{-1} = u^{-1}\kappa_v(w)u$
$= \kappa_u(\kappa_v(w)) = \kappa_u \circ \kappa_v$

Kapitel 10: Jordansche Normalform

1. Schursche Normalform

Sei K ein beliebiger Körper

Satz 1.1

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann ähnlich zu einer Matrix in (oberer) Dreiecksgestalt, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ in oberer Dreiecksgestalt.

$\Rightarrow \chi_A(t) = \det(A - tE_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - t & & & * \\ 0 & \lambda_2 - t & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - t \end{vmatrix}$

$= (\lambda_1 - t) \cdot (\lambda_2 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$

Umgekehrt Sei $A \in K^{n \times n}$ so dass χ_A in Linearfaktoren zerfällt.
Induktion nach n. Induktionsanfang $n = 1$
Jede 1x1 Matrix ist Dreiecksmatrix.
Sei $n \geq 2$ weil das Char. Polynom in Linearfaktoren zerfällt, existiert ein Eigenwert $\lambda \in K$ und ein zugehöriger EW $b \in K^n \neq 0$
Ergänze (b) zu einer Basis, $\mathcal{B}$ von $K^n = (b, b_2, \ldots, b_n)$

$\Rightarrow [\varphi_A]_B = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $A \in K^{(n-1)\times(n-1)}$

$\Rightarrow \chi_A(t) = (\lambda - t) \cdot \chi_{A'}(t)$
$\Rightarrow$ Hieraus folgt, dass auch $\chi_{A'}$ in Linearfaktoren zerfällt.

Also existiert eine Basis $\mathcal{B}'$ von $K^{n-1} = \text{lin}_K(b_2, \ldots, b_n)$
so dass $[\varphi_{A'}]_{B'}$ obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow [\varphi_A]_{(b,\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & x & \cdots & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

□

2. Jordanblöcke

Definition 2.1

Ein Jordanblock ist oder (elementare Jordanmatrix) ist
eine Matrix der Form.

$$J_{m,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Beispiel 2.2 $J_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J_{1,i} = (i)$ $K = \mathbb{C}$

$$J_{3,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{2,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Lemma 2.3

Ein Jordanblock $J_{m,\lambda}$ für $m > 1$ und $\lambda \in K$ ist nicht diagonalisierbar.
Die geometrische Vielfachheit von λ ist 1.

Beweis: Es gilt $\chi_{J_{m,\lambda}}(t) = (\lambda - t)^m$. Damit ist λ der einzige Eigenwert von $J_{m,\lambda}$ der algebraischen Vielfachheit m.

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$(J_{m,\lambda} - \lambda E_m)\, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x_2 = x_3 = ... = x_m = 0$$

Lösungsraum des LGS wird erzeugt z.B. durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

Lemma 2.4

Für das Minimalpolynom eines Jordanblocks gilt
$\mu_{J_{m,\lambda}}(t) = \chi_{J_{m,\lambda}}(t) = (t-\lambda)^m$

Definition 2.5

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ besitzt Jordansche Normalform, falls

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_1,\lambda_1} & & & \\ 0 & J_{m_2,\lambda_2} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_k,\lambda_k} \end{pmatrix} \text{ mit } m_1 + ... + m_k = n, \lambda_1, ... , \lambda_{m\in K}$$

Bemerkung: Jeder Diagonalmatrix besitzt Jordansche Normalform.

Beispiel:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist JNF

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nicht JNF

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ ist JNF

3. Jordansche Normalform einer komplexen Matrix

Ab jetzt $K = \mathbb{C}$.

Satz 3.1

Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ linearer Ednomorphismus.

Dann existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_B$ Jordansche Normalform besitzt.(eindeutig bis auf Umordnung der Jordanblöcke).

Korollar 3.2
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ in JNF ist.

Korollar 3.3
Zwei Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ sind genau dann ähnlich, wenn sie dieselbe JNF besitzen(bis auf Umordnung der Jordanblöcke).

3.1 Jordanketten und verallgemeinterte Eigenräume

Sei $V \in \mathbb{C}^n, \varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V, \lambda$ Eigenwert von φ.
Weiter sei $B = (v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V mit
$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} J_{m,\lambda} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$
Dann gilt

$$(*) \begin{cases} \varphi(v_1) = \lambda v_1 \\ \varphi(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \\ \vdots \\ \varphi(v_m) = v_{m-1} + \lambda v_m \end{cases} \iff \begin{array}{c} (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_1 = 0 \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_2 = v_1 \\ \vdots \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_m = v_{m-1} \end{array}$$

Definiton 3.4
Eine Familie von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ heißt Jordankette, von φ bezüglich Eigenwert λ, falls sie (*) erfüllt. & $v_1 \neq 0$

Lemma 3.5
Eine Jordankette zum Eigenwert λ von φ ist linear unabhängig.
Beweis: per Induktion nach m.
Für $m = 1 : (v_1)$ linear unabh. weil $v_1 \neq 0$.
Für $m \geq 2$ Nach Induktionsvor. $(v_1, \dots, v_{m-1})$ linear unabh.
Angenommen es ex. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1} \in \mathbb{C}$ so dass
$v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$
$\Rightarrow v_{m-1} = (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_m = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1})$

$= \underbrace{\mu_1(\varphi - \lambda \mathrm{id})v_1}_{=0} + \mu_2(\varphi - \lambda \mathrm{id})v_2 + ... + \mu_{m-1}(\varphi - \lambda \mathrm{id})v_{m-1}$

$= \mu_2 v_1 + \mu_3 v_2 + ... + \mu_{m-1} v_{m-2}$ Widerspruch! $\square$

Definition 3.6

Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt verallgemeinerter Eigenvektor(oder Hauptvektor) von φ, fall ex. $m > 0$ mit:

$(**) \qquad (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$

Das kleinste $m > 0$, für das $(**)$ gilt heißt Stufe von v.

Bemerkung

Hauptvektor der Stufe1=Eigenvektoren

Sei v ein verallgemeinerter Eigenvektor von φ der Stufe m.

$v_1 := (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{m-1}(v)$

$v_2 := (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{m-2}(v)$

$\vdots$

$v_{m-2} := (\varphi - \lambda \mathrm{id})^2(v)$

$v_{m-1} := (\varphi - \lambda \mathrm{id})v_m = (\varphi - \lambda \mathrm{id})^1 v$

$v_m := v$

Dann gilt (*), das heißt $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ bilden eine Jordankette.

Definition 3.7

Die Menge $V^\lambda(\varphi) := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id})^k$

heißt verallgemeinerter Eigenraum von φ bzgl λ.

Man beachte: $\ker(\varphi - \lambda \mathrm{id})^k \subseteq (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{k+1} \forall k \geq 1$.

Proposition 3.8

Es seien φ und ψ Eondomorphismen die mit einander vertauschen: $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Dann ist für jeden Eigenwert λ von φ der verallgemeinerte Eigenraum $V^\lambda(\varphi)$ invariant unter ψ. Insbesodere ist $V^\lambda(\varphi)$ invariant unter φ.

Beweis: Sei $v \in V^\lambda(\varphi)$. Dann ex. $m \in \mathbb{N}$ mit $v \in \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id})^m$

$\Rightarrow (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(\psi(v)) = \psi(\underbrace{(\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v)}_{=0}) = \psi(0) = 0$

$\square$ Erinnerung: $(x+y)^n = \sum\limits_{k=c}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

3.2 Kurze Vorüberlegungen zum Minimalpolynom

Sei K beliebiger Körper. In der Übung wurde gezeigt:

Satz 3.9
Sei $V = K^n$ und $A \in K^{n\times n}$. Seien $p_1, p_2, \dots, p_r \in K[t]$
teilerfremd mit $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = \mu_A$
Dann gilt: $V = \ker(p_1^*(A)) \oplus \ker(p_2^*(A)) \oplus \ldots \oplus \ker(p_r^*(A))$

Beispiel 3.10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

$\Rightarrow \chi_A(t) = (1-t)[(1-t)(3-t)+1] = (1-t)(t-2)^2$
$= -\mu_A(t)$
$\mu_A(t) = \underbrace{(t-1)}_{p_1}\underbrace{(t-2)^2}_{p_2}$

$$\ker(p_1^*(A)) = \ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(p_2^*(A)) = \ker\big((A - 2E_3)^2\big) = \ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2\right)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 3.11
Für $A = \begin{pmatrix} J_{m,\lambda} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ teilt das Minimalpolynom $(t-\lambda)^m$, des Jordanblocks $J_{m,\lambda}$ das Minimalpolynom vom A.

Beweis: ÜA

10.3.3 Zerlegung von $\mathbb{C}^n$ entlang der verallgemeinerten Eigenräume

Jetzt wieder $K = \mathbb{C}$.

Satz 3.11

Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ mitden paarweise verschiedenen
Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Dann gilt:
$V = V^{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_r}(\varphi)$

Beweis: Sei $A = [\varphi]$. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt das Minimalplynom $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\cdots(t-\lambda_r)^{k_r}$ in
Linearfaktoren.
Wir setzen $p_i := (t-\lambda_i)^{k_i}$, und wir wollen zeigen, dass
$\ker p_i^*(A) = \ker(A - \lambda \mathrm{id})^{k_i} = V^{\lambda_i}(\varphi)$
gilt. Offenbar: "$\subseteq$". Nehmen wir an, es gäbe einen Hauptvektor
von φ bzgl. λ_i der Stufe $m > k_i$. Sei $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ zugehörige
Jordankette. Ergänze diese Jordankette zu einer Basis B.

Dann gilt
$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} J_{m,\lambda_i} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$
Nach Lemma 3.11 teilt das Minimalpolynom $(t-\lambda_i)^m$ das Polynom $\mu_A(t)$.
Widerspruch. Aus Satz 3.9 folgt die Behauptung. □

Lemma 3.14

(zweiter Index ist kein Exponent)
$C = \left(v_1^1, v_2^1, \dots, v_{k_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{k_2}^2, \dots, v_1^s, \dots, v_{k_s}^s\right)$
eine Familie von s Jordanketten zum Eigenwert λ von φ, d.h.
$(\varphi - \lambda \mathrm{id})\left(v_{j+1}^i\right) = v_j^i$ für $1 \leq j \leq k_i$ und $(\varphi - \lambda \mathrm{id})(v_1^i) = 0$
Sind die Eigenvektoren $v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^s$ linear unabhängig, so sind
alle Vektoren in C linear unabhängig.

Beweis: Sei $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} v_j^i = 0$ für $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ Angenommen es ex. i, j mit $\alpha_{ij} \neq 0$.
Sei k das Maximum aller Stufen, für die ein Index i ex. mit $\alpha_{ik} \neq 0$.
$\Rightarrow 0 = (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{k-1}(\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} v_j^i)$
$= \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{k-1} v_j^i$

$= \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik}(\varphi - \lambda \mathrm{id})^{k-1} v_k^i$

$= \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} v_1^i$

Widerspruch zur Vor.

□

Lemma 3.15

Sei C wie oben, aber linear abhängig. Dann ex. eine Familie C' von Jordanketten, mit $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(C) = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(C)$, die einen Vektor weniger enthält.

<u>Beweis:</u> Aus Lemma 3.14 folgt, dass die Eigenvektoren $v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^s$ linear abhängig sind. D.h. es existiert nicht triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_1^i = 0$ mit $\alpha_i \neq 0$.

Der Index i sei so gewählt, dass die zugehörige Jordankette minimale Länge hat und all denjenigen mit $\alpha_i \neq 0$.

Ohne Einschränkung: i=1.

<u>Fall 1:</u> $k_1 = 1$: Sreiche v_1^1 in C, um C' zu erhalten.

<u>Fall 2:</u> $k_1 \geq 2$: Setze $\widetilde{v}_j^1 := v_{j+1}^1 + \sum\limits_{\alpha_l \neq 0} \frac{\alpha_l}{\alpha_1} v_{j+1}^l$ für $1 \leq j \leq k_1$

Wegen der Minimalität von k_1 gilt: $k_1 \leq k_l \forall l$ mit $\alpha_l \neq 0$.

Setze $C' = \left(\widetilde{v}_1^1, \dots, \widetilde{v}_{k_1-1}^1, v_1^2, \dots, v_{k_2}^2, \dots, v_1^s, \dots, v_{k_s}^s\right)$

Es gilt $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(C') = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(C)$.

Zu zeigen: $\left(\widetilde{v}_1^1, \dots, \widetilde{v}_{k_1-1}^1\right)$ Jordankette:

$(\varphi - \lambda \mathrm{id})\left(\widetilde{v}_j^1\right) = (\varphi - \lambda \mathrm{id})\left(v_{j+1}^1 \sum\limits_{\alpha_l \neq 0} \frac{\alpha_l}{\alpha_1} v_{j+1}^l\right)$

$= v_j^1 + \sum\limits_{\alpha_l \neq 0} \frac{\alpha_l}{\alpha_1} v_j^l = \widetilde{v}_{j-1}^1$

□

Satz 3.16

Für jeden Eigenwert λ von φ besitzt der verallgemeinerte Eigenraum $V^{\lambda}(\varphi)$ eine Jordanbasis, d.h. eine Familie von Jordanketten, die eine Basis von $V^{\lambda}(\varphi)$ bilden.

Beweis: Sei $(u_1, \dots, u_l)$ eine Basis von $V^{\lambda}(\varphi)$. Jeder Vektor ist Hauptvektor der Stufe $k_i \in \mathbb{N}$. Dies liefert eine Jordankette der Länge k_i. Die Voreinigung von diesen l Jordanketten ist eine Familie von Jordanketten, die dne ganzen verallgemeinerten Eigenraum erzeugt.

Durch (wiederholtes) Anwenden von Lemma 3.15 erhalten wir eine Jordanbasis. □

4. Bestimmung der Jordanschen Normalform

Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ eine Endomorphismus. Wir wollen eine Basis J bestimmen, so dass $[\varphi]_J$ INF besisztt.
(i) Bestimme die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ mit ihren algebraischen Vielfachheiten $e_1, e_2, \dots, e_l \Rightarrow e_1 + e_2 + \dots + e_{l=n.}$
(ii) Für jeden Eigenwert λ_i bestimme Basis des verallgemeinerten Eigenraums $V^{\lambda_i}(\varphi)$. Dazu löst schrittweise Gleichungssysteme $(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^j v = 0$ für $j = 1, 2, 3, \dots$ bis man e_i linear unabhängige Lösungen hat.
(iii) Bilde Jordanketten und verkürze Schrittweise durch Anwendung von Lemma 3.15 bis man eine Basis erhält.
(iv) Die Matrix des Basiswechsels besitzt als Spalten die verallgemeinerten Eigenvektoren von den Jordanbasen. (kettenweise aufsteigend!)

Beispiel 3.17 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$

(i) $\chi_A(t) = (1-t)^5$, d.h. 1 ist einziger Eigenwert von A der algebraischen Vielfachheit 5.

(ii) Wähle Basis von $\mathbb{C}^5$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $(A - E_5)v_1 = w$ und $(A - E_5)v_2 = -w$ für

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Also ist w ein Eigenvektor, und v_1 und v_2 sind Hauptvektoren der Stufe 2.

Außerdme gilt:

$(A - E_5)v_3 = (A - E_5)v_4 = v_5$ und $(A - E_5)v_5 = 0$.

(iii) Die Wer haben die folgende Familie von Jordanketten:

$v_1 \to w,\ v_2 \to -w, v_3 \to v_5, v_4 \to v_5$

•Die bei v_1 und v_2 beginnenden Jordanketten sind linear abhängig:

Setze

$$\widetilde{v}_1 = v_1 + \tfrac{1}{1}v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $(A - E_5)\widetilde{v}_1 = 0$, das heißt $\widetilde{v}_1$ Eigenvektor

$\rightsquigarrow (\widetilde{v}_1, v_2 \to -w, v_3 \to v_5, v_4 \to v_5)$

•Die bei v_3 und v_4 beginnenden Jordanketten sind ebenfalls linear abhängig.

Setze $\widetilde{v}_3 = v_3 - \tfrac{1}{1}v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wiederrum ist $\widetilde{v}_3$ Eigenvektoren

$\rightsquigarrow (\widetilde{v}_1, v_2 \to -w, \widetilde{v}_3, v_4 \to v_5)$,

und es gilt: $-w - v_5 - \frac{1}{2}\widetilde{v}_3 + \frac{1}{2}\widetilde{v}_1 = 0$

$\rightsquigarrow (v_2 \to w, \widetilde{v}_3, v_4 \to v_5)$ Jordanbasis von $V'(A) = \mathbb{C}^5$.

(iv) Insgesamt erhalten wir die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } S^{-1}AS = J_{2,1} \oplus J_{1,1} \oplus J_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kapitel 11 Extras

1. Dualräume

Sei V Vektorraum über beliebigem Körper K.

Definition 1.1

Der K-VR $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$

der Linearformen heißt <u>Dualraum</u> von V.

Proposition 1.2

Fall $\dim_K V < \infty$, so ist V^* isomorph zu V.

<u>Beweis:</u> $\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, K) = \mathrm{dim V}$ $\square$

Erinnerung: $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \cong K^{m \times n}$ $\dim = m \cdot n$

Homogenes Lineares Gleichungssystem

$Ax = 0 \qquad A \in k^{m \times n}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 = (a_{ij}) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \iff x \in \ker a_1 \cap \ker a_2 \cap \ldots \cap \ker a_m \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$(a_1 : K^n \to \mathrm{Kx} \mapsto a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) \in (K^n)^*$

Beispiel

Sei V endlichdimensional mit Basis $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

Definiere Linearformen:

$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$B^* := (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)$ <u>duale Basis</u> zu B

Proposition 1.3

B^* Basis von V^*

<u>Beweis:</u> $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_1 b_1^* = 0$, für $\alpha_i \in K$.

$\Rightarrow \forall v \in V \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i b_i^*(v) = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i b_i^*(b_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \forall j$

B^* linear unabhängig.

2. Adjunkte eines Endomorphismus

Sei $(V, \langle . \, , . \rangle)$ euklidischer oder unitärer Raum über $\mathbb{K}$ und

$\varphi \in_K (V)$.

Definition 2.1

Eine Abbildung $\varphi* : V \to V$ heißt <u>adjungiert</u> zu φ, falls

$< \varphi^*(v), w > = \langle v, \varphi(w) \rangle \; \forall v, w \in V$.

Bemerkung: Im allgemeinen muss φ nicht existieren.

Proposition 2.2

Falls eine adjungierte existiert, so ist die eindeutig besitmmt und linear.

<u>Beweis:</u> Seien φ^* und φ' adjungiert zu φ.

Für $v, w \in V : < \varphi^*(v), w > = < v, \varphi(w) > = < \varphi'(v), w >$

$\Rightarrow < \varphi^*(v) - \varphi'(v), w > = 0$ Weil $\langle . \rangle$ nicht ausgeartet ist, folgt

$\varphi^*(v) - \varphi'(v) = 0 \forall v \in V \Rightarrow \varphi^* = \varphi'$.

Es gilt $\forall v, v', w \in V$:

$< \varphi^*(v + v'), w > = < v + v', \varphi(w) > = < v, \varphi(w) > + < v', \varphi(w) >$

$= < \varphi^*(v), w > + < \varphi^*(v'), w > = < \varphi^*(v) + \varphi^*(v'), w >$

$\Rightarrow < \varphi^*(v + v') - (\varphi^*(v) + \varphi^*(v')), w > = 0$

$$\underset{\substack{\text{Nichtausgeartetheit}\\ \text{von}\quad <.>}}{\Rightarrow} \varphi^*(v+v') = \varphi^*(v) + \varphi^*(v')$$

Analog $\varphi^*(\alpha v) = \alpha\varphi^*(v) \forall \alpha \in K$

Insgesamt: φ linear.

Proposition 2.3

Sei B eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$. Dann ist für $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n$

Die Abbildung $\psi^* = \overset{\text{konj. und transp.}\downarrow}{\varphi_{\left([\psi]_B\right)^*}}$

die Adjungierte zu ψ.

3. Tensorprodukte

Seien V und W Vektorräume über K. Betrachte den Vektorraum

$$F(V \times W) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{(v_i,w_i)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, (v_i, w_i) \in V \times W \right\}$$

der K Vektorraum der formalen K-Linearkombinationen von Elementen aus $V \times W$.

Auf $F(V \times W)$ betrachte Relation $\sim$

$\forall v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, \forall \alpha \in K$

$e_{(v_1+v_2,w)} \sim e_{(v_1,w)} + e_{(v_2,w)}$

$e_{(v,w_1+w_2)} \sim e_{(v,w_1)} + e_{(v,w_2)}$

$e_{(\alpha v,w)} \sim \alpha e_{(v,w)} \sim e_{(v,\alpha w)}$

und symmetrischen und transitiven Abschluss. Das ist eine Äquivalenzrelation, die wir wieder mit $\sim$ bezeichnen.

Definition 3.1

Der Quotient $V \otimes W := F(V,W)/_{\sim}$

heißt Tensorprodukt von V und W.

Die Elemente von $V \otimes W$ schreiben wir

$v \otimes w := \left[e_{(v,w)}\right]_{\sim} \; \forall v \in V, w \in W$

Auf $V \otimes W$ ist eine Addition definiert:

$v \otimes w + v' \otimes w' = \left[e_{(v,w)} + e_{(v',w')}\right]_{\sim}$

$\alpha \cdot (v \otimes w) = \left[\alpha \cdot e_{(v,w)}\right]_{\sim}$

Wohldefiniertheit folgt aus den Gleichungen:

$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
$(\alpha v) \otimes w = \alpha(v \otimes w) = v \otimes (\alpha w)$
$\Rightarrow (V \otimes W, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

Proposition 3.2

Seien V und W endlichdimensional mir $\dim_K V = n$
und $\dim_K W = m$. Dann ist $\dim_K(V \otimes W) = m \cdot n$
<u>Beweis:</u> Seien $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$
Basen von V und W. Dann ist
$\{b_i \otimes c_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ Basis von $V \otimes W$.
$\square$

Bemerkung 3.3

U, V, W K-VR
$V \otimes W \cong W \otimes V$
$U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$

Bemerkung zur Notation: an das $\otimes$ wird auch
der Köroer über der das Produkt definiert ist geschrieben
$\rightsquigarrow \otimes_K$
Falls $\mathcal{M}$ Menge von K-VR die abgeschlossen ist bzgl. Tensorprodukten,
dann ist $(\mathcal{M}, \otimes)$ eine kommutative Halbgruppe.

<u>Beispiel:</u>
$K^n \times K^m \cong K^{m \times n}$
$K = \mathbb{Q}$, $n = 2, m = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (0, 0, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Satz 3.4 (Universelle Eigenschaft)

Für jedes Paar (X, f), wobei X ein K-VR und
$f : V \times W \to K$ K-Bilinear, existiert eine eindeutige Abbildung

$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, X)$ mit $\varphi \circ \tau = f$
für $\tau : V \times W \to V \otimes W : (v, w) \mapsto v \otimes w$
<u>Beweis:</u> $\varphi(v \otimes w) = f(v, w)$ Wohldefiniert!
$\square$