Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

Kompaktseminar 11.08/12.08.

1 Gruppen, Ringe, Körper, Algebren, Polynome

- Definiert die Begriffe Gruppe, Ring, Körper, Algebra und erklärt inwieweit sie sich unterscheiden.
- Gebt jeweils Beispiele an, z.B. durch verschieden Klassen von Matrizen.
- Definiert den Begriff Polynom. Worin besteht der Unterschied zwischen dem Polynom p und der Polynomabbildung/Einsetzungsabbildung p^*?
- Was ist eine Nullstelle? Wieviele gibt es?
- Erklärt Polynomdivision und findet einen Beweis in dem wir sie benutzt haben.
- Definiert: Vektorraum. Als Beispiele: K^n, $\mathbb{R}[t]$, Folgenräume, stetige Funktionen jeweils mit ihren Verknüpfungen.
- Definiert Untervektorraum. Gebt äquivalente Definitionen an.

2 Vektorräume, Basis, Basisergänzung

- Betrachtet Schnitt, Vereinigung, (direkte) Summe. Wann sind die konstruierten Menge Untervektorräume?
- Definiert: Erzeugendensystem, Lineare Hülle, Basis, Lineare Unabhängigkeit. Gebt Beispiele.
- Beweist: Jeder Vektor hat eine eindeutige Darstellng bezüglich einer Basis.
- Formuliert und beweist die folgenden Sätze: Basisaustauschsatz und Basisergänzungssatz.
- Definiert den Begriff Dimension und beweist seine Wohldefiniertheit.
- Beweist die Existenz einer Basis im endlicherzeugten Fall.
- Gebt Beispiele für unendlichdimensionale Vektorräume an.
- Beweist die Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen und direkten Summen.

3 Lineare Gleichungssysteme und Gaußverfahren

- Beschreibt das Gaußsche Verfahren und geht dabei auf die Grundlagen der Matrizenrechnung, Zeilenumformungen und Elementarmatrizen ein.
- Erläutert die Begriffe: Zeilenstufenform, Zeilenrang, Spaltenrang, Rang. Erklärt ihre Zusammenhänge und das Rangkriterium zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme.
- Welche Aussage kann man allgemein über die Lösungen von lineare Gleichungssystemen machen? Wie hängen inhomogene und homogene Lösung zusammen?
- Wie invertiert man Matrizen? Beweist die Korrektheit des Verfahrens. Charakterisiert $GL_n(K)$.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

- Wie erhält man Koordinaten für einen Vektor $v \in V$, falls V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist? Beweist den Isomorphismus zu K^n.
- Was ist eine darstellende Matrix? Welche Zusammenhänge gibt es zwischen einer lineare Abbildung und seiner darstellenden Matrix?
- Beweist die Isomorphie von $\mathrm{End}(V)$ und $K^{n \times n}$ falls V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ist.
- Gebt Beispiele an. Am besten verschiedene Arten eine lineare Abbildung zu definieren, z.B. im Polynomring, in Vektorräumen über endlichen Körpern.
- Stellt die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen und Matrizenmultiplikation dar.
- Erkärt Basistransformation für darstellende Matrizen von lineare Abbildungen und Endomorphismen. Wie führt man sie durch? Gebt Bsipiele.
- Definiert Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen. Gebt eine besonders einfache Form an, zu der die darstellende Matrix einer linearen Abbildung äquivalent ist.

5 Determinanten

- Definiert Determinantenform.
- Welche Eigenschaften haben Determinanten? Beweist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Skizziert die Beweise für Exiztenz und Eindeutigkeit der Determinante.
- Wie berechnet man sie?
- Definiert die adjunkte Matrix und erläutert die Cramersche Regel zur Lösung lineare Gleichungssysteme.

6 Quotienten, affine Geometrie

- Quotienten von Gruppen. Betrachtet als Beispiel $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$.
- Quotientenkörper.
- Definiert Quotientenvektorraum und diskutiert die wesentlichen Eigenschaften. Gebt eine anschauliche Darstellung für den Quotienten der Ebene durch eine Gerade.
- Wie lassen sich lineare Abbildungen auf dem Quotientenraum definieren?
- Beweist die Dimensionsformel für Quotienten. Wo tauchten Quotienten in den Übungsaufgaben auf?
- Definiert den Begriff des affinen Unterraumes und damit zusammenhängende Eigenschaften. Erkärt die Unterschiede zwischen affinen Unterräumen und (linearen) Untervektorräumen.

7 Euklidische und Unitäre Vektorräume

- Was ist ein Skalarprodukt? Wie unterscheidet sich der unitäre vom euklidischen Fall? Was ist eine Norm? Welche Zusammenhänge gelten zwischen Normen und Skalarprodukten? Gebt Beispiele an: ℓ^2, stetige Funktionen.
- Was sind euklidischen/unitäre Vektorräume?
- Was ist eine Metrik? Welcher Zusammenhang besteht zwischen eukl./unitären Vektorräumen, normierten Räumen und metrischen Räumen?
- Was besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?
- Gebt die Polarisierungsidentitäten an und beweist sie.
- Gebt den Zusammenhang zwischen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und dem Winkel zwischen Vektoren an.
- Beweist den Satz von Pythagoras mittels Skalarprodukt.

8 Orthogonalität

- Definiert die Begriffe: orthogonal, orthogonales Komplement.
- Welche Aussagen gelten für das orthogonale Komplement? Worin unterscheiden sich der endlich-dimensionale und der unendlich-dimensionalen Fall?
- Was ist eine Orthognalbasis bzw. Orthonormalbasis? Erläutert das Gram-Schmidt Verfahren?
- Gebt eine geometrische Interpretation des Gram-Schmidt-Verfahrens an.
- Definiert und vergleicht die Begriffe orthogonal und unitär für Abbildungen und Matrizen. Gebt verschiedene Charakterisierungen an.
- Beweist, dass $A \in SO(V)$ genau dann, wenn $A^3 \in SO(V)$.

9 Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit

- Wiederholt die Begriffe Eigenwert, Eigenraum, Eigenvektor und charaktreistisches Polynom. Gebt verschiedene Beispiele in $\mathbb{R}^2$ an.
- Beweist, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Welche Konsequenz hat das für die Summe der Eigenräume?
- Was ist die algebraische und die geometrische Vielfachheit? Welcher Zusammenhang besteht?
- Beweist, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben. Gilt das auch umgekehrt?
- Definiert die Begriffe Diagonalisierung, F-invariant.
- Welche Auswirkung haben F-invariante Unterräume auf die Struktur der darstellenden Matrix?
- Welche Kriterien gibt es für Diagonalisierbarkeit und Existenz einer darstellenden oberen Dreiecksmatrix?
- Wie kann man eine Diagonalisierung berechnen?

10 Cayley-Hamilton und normale Matrizen

- Formuliert den Satz von Cayley-Hamilton.
- Definiert den Begriff Minimalpolynom und beweist deren Existenz und Eindeutigkeit.
- Zeigt, dass jedes Polynom welches einen Endomorphismus annuliert durch das zugehörige Minimalpolynom teilbar ist.
- Beweist, dass ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom haben.
- Welche Eigenschaften haben normale Matrizen. Geht im speziellen auf hermitesche, orthogonale, symmetrische und unitäre Matrizen ein. Stellt tabellarisch die Unterschiede und Gemeinsamkeiten dar.
- Gebt eine Skizze des Beweises des Hauptsatzes für normale Matrizen an.

11 Bilinearformen, quadratische Formen

- Definiert Bilinearform. Betrachtet die darstellende Matrix einer Bilinearform und die zugehörige Basistransformation.V
- Vergleicht die Basistransformation von Bilinearformen und linearen Abbildungen.
- Definiert quadratische Form und Polarform. Wie sieht die darstellende Matrix der Polarform von $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ aus?
- Formuliert den Satz über die Hauptachsentransformation.
- Definiert Quadriken und illustriert die Hauptachsentransformation an Beispielen in $\mathbb{R}^2$, z.B. für Ellipsen..
- Formuliert den Satz von Sylvester. Wie kann man die Parameter des Satzes ausrechnen? Geht auf das Zusammenspiel von Polarform und Endomorphismus ein.

12 Jordansche Normalform

- Wie sieht eine Jordan-Normalform aus? Definiert alle dafür nötigen Begriffe.
- Gebt Beispiele für veschieden Jordan-Normalformen an bzgl. charakteristischem Polynom und Minimalpolynom, verschiedene Dimensionen von Eigenräumen und Haupträumen/verallg. Eigenräumen.
- Wie berechnet man eine Jordansche Normalform?