Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

Kompaktseminar 11.08/12.08.

1 Gruppen, Ringe, Körper, Algebren, Polynome

- Definiert die Begriffe Gruppe, Ring, Körper, Algebra und erklärt inwieweit sie sich unterscheiden.
- Gebt jeweils Beispiele an, z.B. durch verschieden Klassen von Matrizen.
- Definiert den Begriff Polynom. Worin besteht der Unterschied zwischen dem Polynom p und der Polynomabbildung/Einsetzungsabbildung p^*?
- Was ist eine Nullstelle? Wieviele gibt es?
- Erklärt Polynomdivision und findet einen Beweis in dem wir sie benutzt haben.
- Definiert: Vektorraum. Als Beispiele: K^n, $\mathbb{R}[t]$, Folgenräume, stetige Funktionen jeweils mit ihren Verknüpfungen.
- Definiert Untervektorraum. Gebt äquivalente Definitionen an.

2 Vektorräume, Basis, Basisergänzung

- Betrachtet Schnitt, Vereinigung, (direkte) Summe. Wann sind die konstruierten Menge Untervektorräume?
- Definiert: Erzeugendensystem, Lineare Hülle, Basis, Lineare Unabhängigkeit. Gebt Beispiele.
- Beweist: Jeder Vektor hat eine eindeutige Darstellng bezüglich einer Basis.
- Formuliert und beweist die folgenden Sätze: Basisaustauschsatz und Basisergänzungssatz.
- Definiert den Begriff Dimension und beweist seine Wohldefiniertheit.
- Beweist die Existenz einer Basis im endlicherzeugten Fall.
- Gebt Beispiele für unendlichdimensionale Vektorräume an.
- Beweist die Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen und direkten Summen.

3 Lineare Gleichungssysteme und Gaußverfahren

- Beschreibt das Gaußsche Verfahren und geht dabei auf die Grundlagen der Matrizenrechnung, Zeilenumformungen und Elementarmatrizen ein.
- Erläutert die Begriffe: Zeilenstufenform, Zeilenrang, Spaltenrang, Rang. Erklärt ihre Zusammenhänge und das Rangkriterium zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme.
- Welche Aussage kann man allgemein über die Lösungen von lineare Gleichungssystemen machen? Wie hängen inhomogene und homogene Lösung zusammen?
- Wie invertiert man Matrizen? Beweist die Korrektheit des Verfahrens. Charakterisiert $GL_n(K)$.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

- Wie erhält man Koordinaten für einen Vektor $v \in V$, falls V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist? Beweist den Isomorphismus zu K^n.
- Was ist eine darstellende Matrix? Welche Zusammenhänge gibt es zwischen einer lineare Abbildung und seiner darstellenden Matrix?
- Beweist die Isomorphie von $\mathrm{End}(V)$ und $K^{n\times n}$ falls V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ist.
- Gebt Beispiele an. Am besten verschiedene Arten eine lineare Abbildung zu definieren, z.B. im Polynomring, in Vektorräumen über endlichen Körpern.
- Stellt die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen und Matrizenmultiplikation dar.
- Erkärt Basistransformation für darstellende Matrizen von lineare Abbildungen und Endomorphismen. Wie führt man sie durch? Gebt Bsipiele.
- Definiert Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen. Gebt eine besonders einfache Form an, zu der die darstellende Matrix einer linearen Abbildung äquivalent ist.

5 Determinanten

- Definiert Determinantenform.
- Welche Eigenschaften haben Determinanten? Beweist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Skizziert die Beweise für Exiztenz und Eindeutigkeit der Determinante.
- Wie berechnet man sie?
- Definiert die adjunkte Matrix und erläutert die Cramersche Regel zur Lösung lineare Gleichungssysteme.

6 Quotienten, affine Geometrie

- Quotienten von Gruppen. Betrachtet als Beispiel $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$.
- Quotientenkörper.
- Definiert Quotientenvektorraum und diskutiert die wesentlichen Eigenschaften. Gebt eine anschauliche Darstellung für den Quotienten der Ebene durch eine Gerade.
- Wie lassen sich lineare Abbildungen auf dem Quotientenraum definieren?
- Beweist die Dimensionsformel für Quotienten. Wo tauchten Quotienten in den Übungsaufgaben auf?
- Definiert den Begriff des affinen Unterraumes und damit zusammenhängende Eigenschaften. Erkärt die Unterschiede zwischen affinen Unterräumen und (linearen) Untervektorräumen.