TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

Übung am 19.06.09

Seien $p, q \in K[t]$ zwei Polynome. Das Polynom p teilt q (Notation: $p|q$), falls der Rest von p nach Division durch q null ist.

Definition 1. Seien $p, q \in K[t]$ zwei Polynome. Der *größte gemeinsame Teiler* $\mathsf{ggT}(p, q)$ ist das eindeutige normierte Polynom das sowohl p als auch q teilt und ein Vielfaches jeden anderen Teilers ist, d.h.

1. $\mathsf{ggT}(p, q)|p$ und $\mathsf{ggT}(p, q)|q$ und
2. falls $a|p$ und $a|q$, dann $a|\,\mathsf{ggT}(p, q)$.

Den ggT kann man mit dem *euklidischen Algorithmus* rekursiv berechnen. Sei $\deg p > \deg q$ und nach Polynomdivision existieren dann Polynome $s, r \in K[t]$ mit $p = s \cdot q + r$ mit $r = 0$ oder $\deg r < \deg q < \deg p$ und es gilt:

$$\mathsf{ggT}(p, q) = \mathsf{ggT}(r, q) = \mathsf{ggT}(p - sq, q).$$

Iteriert man dieses Verfahren so erhält man schließlich $\mathsf{ggT}(p, q) = \mathsf{ggT}(a, 0)$ (der Grad wird immer kleiner) und a ist der $a = \mathsf{ggT}(p, q)$. Der größte gemeinsame Teiler einer Menge $\{p_1, \ldots, p_r\}$ wird rekursiv definiert, durch

$$\mathsf{ggT}(p_1, \ldots, p_r) = \mathsf{ggT}(p_1, \mathsf{ggT}(p_1, \ldots, \mathsf{ggT}(p_{r-1}, p_r)\cdot)).$$

Die Polynome heißen *teilerfremd*, falls $\mathsf{ggT}(p_1, \ldots, p_r) = 1$.

Lemma 2. *Seien $p_1, \ldots, p_r \in K[t]$. Es existieren Polynome $a_1, \ldots, a_r \in K[t]$ mit*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i p_i = \mathsf{ggT}(p_1, \ldots, p_r).$$

Beweis. euklidischer Algorithmus □

Proposition 3 (Zerlegungssatz)**.** *Sei $V = K^n$ und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Seien $p_1, \ldots, p_r \in K[t]$ teilerfremde Polynome deren Produkt $\mu_A = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$ das Minimalpolynom von A ist. Dann gilt:*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker p_i^*(A).$$

Beweis. Der Beweis funktioniert wie folgt:

- Definiere $h_i = \prod_{j \neq i} p_j$
- Zeige $V = \sum_{i=1}^{r} \ker p_i^*(A)$, wie folgt:
  - Da h_i teilerfremd, existieren nach Lemma a_i mit $\sum a_i h_i = 1$
  - Setzt man A ein so erhält man $E_n = \sum a_i^*(A) h_i^*(A)$, also $v = E_n v = \sum a_i^*(A) h_i^*(A) v$.
  - Da A mit A und E_n und Skalaren kommutiert, folgt $a_i^*(A) h_i^*(A) v \in \ker p_i^*(A)$.

- Also $v = \sum w_i$ mit $w_i = a_i^*(A) h_i^*(A) v \in \ker p_i^*(A)$.

- Zeige, dass die Summe direkt ist, d.h. $\ker p_i^*(A) \cap \bigcup_{j \neq i} \ker p_j^*(A) = \{0\}$ wie folgt
  - $v \in \ker p_i^*(A)$, d.h. $p_i^*(A)v = 0$
  - $v \in \bigcup_{j \neq i} \ker p_j^*(A)$, d.h. es existieren $v_j \in \ker p_j^*(A)$ mit $\sum v_j = v$.
  - Da A mit A und E_n und Skalaren kommutiert und alle Abbildungen linear sind folgt $h_i^*(A)v = 0$
  - Da h_i und p_i nach Konstruktion teilerfremd sind, existieren $b_1, b_2 \in K[t]$ mit $b_1 h_i + b_2 p_i = 1$.
  - Durch Einsetzen von A und Anwendung auf v folgt:

$$v = E_n v = b_1^*(A) \underbrace{h_i^*(A)v}_{0} + b_2^*(A) \underbrace{p_i^*(A)v}_{0} = 0$$

- Daraus folgt: $V = \bigoplus_{i=1}^r \ker p_i^*(A)$.

$\square$

Satz 4. *Sei $V = K^n$ und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Es gilt: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_A in verschieden Linearfaktoren zerfällt.*