Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

1. Übungsblatt

Abgabe 24.04. **vor** der Übung

Aufgabe 1: Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum und $x, y \in V$. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Für $x \neq 0 \neq y$ gilt: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff$ es existiert $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y = \alpha x$.
2. $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x$ und y sind linear abhängig.

3+3 Punkte

Aufgabe 2: Sei V ein K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Das *Radikal* R_β von β ist die Menge aller $v \in V$ für die $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$. Zeige:

1. Das Radikal $R_\beta := \{v \in V \mid \beta(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$ ist ein Untervektorraum von V.
2. Betrachte die Abbildung $\tilde\beta : V/R_\beta \times V/R_\beta \to K$ mit $\tilde\beta(v + R_\beta, w + R_\beta) := \beta(v, w)$ auf dem Quotientenraum V/R_β. Zeige:
   - $\tilde\beta$ ist wohldefiniert und
   - $\tilde\beta$ ist eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform.

6 Punkte

Proposition (Notizen der VL, Proposition 7.6.4)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum mit zugehöriger Metrik δ. Für alle $x, y \in V$ existiert ein eindeutiger Punkt $m_{x,y} \in V$ mit*

$$\delta(x, m_{x,y}) \;=\; \delta(y, m_{x,y}) \;=\; \frac{1}{2}\,\delta(x, y)\,.$$

Der Punkt $m_{x,y}$ heißt Mittelpunkt *zwischen x und y.*

Aufgabe 3: Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum mit zugehöriger Metrik δ. Betrachte die Abbildung $\phi : V \to V$ mit $\phi(0) = 0$ und

$$\delta(\phi(x), \phi(y)) \;=\; \delta(x, y)$$

für alle $x, y \in V$, also eine *(abstandserhaltende) Isometrie.* Dann ist ϕ linear. Zeige der Reihe nach:

a) $\phi(m_{x,y}) \;=\; m_{\phi(x),\phi(y)}$ für alle $x, y \in V$, wobei $m_{x,y}$ bzw. $m_{\phi(x),\phi(y)}$ der Mittelpunkt von x und y bzw. $\phi(x)$ und $\phi(y)$ ist.

b) $\phi(2x) = 2\phi(x)$ für alle $x \in V$.

c) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ für alle $x, y \in V$.

d) $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$ für alle $x \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Hinweis![1]

6 Punkte

[1] Benutze Polarisierungsidentitäten.