Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

10. Übungsblatt

Abgabe 26.06. vor der Übung

Aufgabe 28: Es seien $A \in K^{r \times r}$ und $B \in K^{l \times l}$ für $k, l \geq 1$ zwei quadratische Matrizen und $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Zeige: Das Minimalpolynom μ_C ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome μ_A und μ_B. **6 Punkte**

Aufgabe 29.1: Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, d.h. $A^* = A$. Zeige: Falls es ein $k \in \mathbb{N}, k > 1$ gibt mit $\langle A^k v, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$, dann gilt $A = 0$.

4 Punkte

Aufgabe 29.2: Sei $Q : K^n \to K$ eine quadratische Form. Dann existiert ein homogenes Polynom $q(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} t_i t_j \in K[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ von Grad 2 mit

$$Q((v_1, v_2, \ldots, v_n)^{tr}) = q^*(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

2 Punkte

Aufgabe 30: Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei weiter $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear, schiefsymmetrische und nicht ausgeartet. Zeige, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass die darstellende Matrix von β die folgende Form hat:

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} H & & & \\ & H & & \\ & & \ddots & \\ & & & H \end{pmatrix},$$

wobei $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Es gilt insbesondere, dass $\dim V$ gerade ist! Was geht schief, wenn $\dim V$ ungerade ist? **6 Punkte**