Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

2. Übungsblatt

Abgabe 04.05.

Abgabe am 04.05. um 14h00-14h30 in den Kasten vor dem Raum MA 874.

Aufgabe 4: Sei $V = \mathcal{C}[-1,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ mit dem folgenden euklidischen Skalarprodukt:

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(t)h(t)dt.$$

Sei $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ eine Basis des Unterraumes U der Polynomabbildungen von Grad höchstens 3 eingeschränkt auf das Interval $[-1,1]$. Bestimme eine Orthonormalbasis des Unterraumes U aus der Basis $\mathcal{B}$ nach dem Verfahren von Gram-Schmidt. **6 Punkte**

Aufgabe 5: Sei $V = \mathcal{C}[-1,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ und sei U der Unterraum aller Polynomabbildungen vom Grad höchstens 3 eingeschränkt auf das Interval $[-1,1]$. Weiter sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$.
Bestimme ein Element aus U, das zu f den kleinsten Abstand hat und zwar bezüglich der Metrik, die durch das folgende euklidische Skalarprodukt induziert wird:

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(t)h(t)dt.$$

6 Punkte

Aufgabe 6:

- Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit unitärem Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ und $F \in \text{End}(V)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent:
  1. F ist die Nullabbildung.
  2. Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle F(v), w \rangle = 0$.
  3. Für alle $v \in V$ gilt $\langle F(v), v \rangle = 0$.
- Finde einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ und ein $F \in \text{End}(V)$, dass nicht die Nullabbildung ist, aber für das $\langle F(v), v \rangle = 0$ gilt.

6 Punkte