Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

4. Übungsblatt

Abgabe 15.05.

Aufgabe 10: Zwei Gruppen G und H heißen *isomorph* wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : G \to H$ mit $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ gibt. Zeige:

1. $U_n\mathbb{C}$ ist eine Untergruppe von $GL_n\mathbb{C}$.
2. $U_n\mathbb{C}$ ist isomorph zu $U(\mathbb{C}^n)$

6 Punkte

Aufgabe 11: Beweise oder widerlege anhand eines Gegenbeispiels:

1. Jede unitäre Abbildung ist surjektiv.
2. Die QR-Zerlegung ist eindeutig.

6 Punkte

Aufgabe 12:

1. Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ und $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$, so dass r_1 und r_2 linear unabhängig sind. Betrachte die beiden Geraden $G_1 = \{p_1 + \alpha r_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{p_2 + \beta r_2 \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Der Abstand zwischen den beiden Geraden ist $d = \min\{\|v_1 - v_2\| \mid v_1 \in G_1, v_2 \in G_2\}$. Zeige:

$$d = \left| \frac{\det(p_1 - p_2, r_1, r_2)}{\|r_1 \times r_2\|} \right|$$

2. Seien $p_1, p_2, v_1, v_2, w_1 \in \mathbb{R}^4$ wie folgt gegeben:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte die Ebene $E = \{p_1 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ und die Gerade $G = \{p_2 + \lambda_1 w_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$. Berechne den Abstand $d = \min\{\|u - v\| \mid u \in E, v \in G\}$ zwischen der Ebenen und der Geraden. Begründe deine Rechnung!

6 Punkte