Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

5. Übungsblatt

Abgabe 25.05. vor der Übung 14h15 im MA041

Aufgabe 13: Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Definiere für $a \in V \setminus \{0\}$ die Spiegelung s_a an der Hyperebene $\{a\}^\perp$ durch:

$$s_a(v) = v - 2\frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \quad \text{für alle } v \in V.$$

Sei $F \in O(V) \setminus \{\mathsf{id}\}$ und $u \in V$ mit $F(u) \neq u$. Setze $U = \{u\}^\perp$. Dann gilt:

1. $s_{F(u)-u}(F(u)) = u$ und
2. $s_{F(u)-u} \circ F|_U$ ist ein orthogonaler Endomorphismus auf U.
3. Jedes $G \in O(V) \setminus \{\mathsf{id}\}$ ist Hintereinanderausführung von höchstens $\dim(V)$ Spiegelungen.

6 Punkte

Aufgabe 14: Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ ein dreidimensionaler Würfel gegeben durch die folgende Menge:

$$C = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; -1 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 1, 2, 3\}.$$

Bezeichne mit $\mathrm{vert}(C)$ die 8 Ecken des Würfels, die den 8 Vektoren in $\{\pm 1\}^3$ entsprechen. Sei $\mathrm{Sym}(C) = \{T \in O(\mathbb{R}^3) \,|\, T(C) = C\}$ die Symmetriegruppe von C. Jede Transformation $T \in \mathrm{Sym}(C)$ bildet eine Permutation der Ecken $\mathrm{vert}(V)$. Daher kann man $\mathrm{Sym}(C)$ als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathrm{vert}(C)) \cong \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, 8\})$ ansehen. Gib deine Ergebnisse stets als Untergruppe der symmetrischen Gruppe an.

1. Finde eine Untergruppe H von $\mathrm{Sym}(C)$, die von Spiegelungen erzeugt wird und die *scharf-eckentransitiv* ist, d.h. für zwei Ecken $v, w \in \mathrm{vert}(C)$ existiert genau ein $T \in H$ mit $T(v) = w$. Wie viele Elemente hat diese Untergruppe.
2. Wähle eine Ecke $v_0 \in \mathrm{vert}(C)$ des Würfels. Was ist der *Stabilisator*

   $$\mathrm{stab}(v_0) = \{T \in \mathrm{Sym}(C) \,|\, T(v_0) = v_0\}$$

   der Ecke v_0?
3. Benutze die bisherigen Teilergebnisse, um die Symmetriegruppe des Würfels anzugeben. Welche Kardinalität hat die Gruppe $\mathrm{Sym}(C)$?

6 Punkte

Aufgabe 15: Sei V ein Vektorraum und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Ein Untervektorraum $W \leq V$ heisst F-*invariant*, wenn $F(W) \subset W$ ist. Definiere den von v erzeugten F-zyklischen Unterraum

$$U(F, v) = \mathrm{lin}\{v, F(v), F^2(v), \dots\}.$$

1. Zeige, dass $U(F, v)$ der kleinste F-invariante Unterraum ist, der v enthält.
2. Betrachte nun den Spezialfall $V = \mathbb{R}^5$. Gib eine Abbildung F_A mittels ihrer darstellenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ an, so dass $\mathbb{R}^5 = V_1 \oplus V_2$ und
   - V_1 und V_2 sind F_A-zyklisch,
   - $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 2$.

6 Punkte