Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

7. Übungsblatt

Abgabe 05.06. vor der Übung

Aufgabe 19: Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \operatorname{End}(V)$. Sei weiter U ein F-invarianter Unterraum von V. Betrachte die beiden Abbildungen $F|_U : U \to U$ und $\bar{F} : V/U \to V/U$.

1. Zeige, dass für die charakteristischen Polynome χ_F, $\chi_{F|_U}$ und $\chi_{\bar{F}}$ gilt:

$$\chi_F = \chi_{F|_U} \cdot \chi_{\bar{F}}.$$

2. Folgere, dass für einen beliebigen Eigenwert die geometrische Vielfachheit kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

6 Punkte

Aufgabe 20:

1. Sei $A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar und $S \in \mathrm{GL}_n K$ eine invertierbare Matrix, so dass $A' := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen ist (vgl. Satz 8.4.10 aus der VL). Zeige, dass die Spalten von S Eigenvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten auf der Diagonalen von A' sind. (Dies wurde in der Vorlesung erwähnt, aber nicht bewiesen!)

2. Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass es zu jedem nilpotenten Endomorphismus $F \in \operatorname{End}(V)$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $[F]_{\mathcal{B}}$ eine echte obere Dreiecksmatrix ist.

6 Punkte

Aufgabe 21: Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $F, G \in \operatorname{End}(V)$. Zeige: $F \circ G$ und $G \circ F$ haben dasselbe charakteristische Polynom. **6 Punkte**