TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Lineare Algebra II
SoSe 2009

9. Übungsblatt

Abgabe 19.06. vor der Übung

Aufgabe 24: Betrachte die folgende Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & i & 1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne eine Matrix $Q \in U_n\mathbb{C}$ sodass Q^*AQ eine Diagonalmatrix ist. **6 Punkte**

Aufgabe 25: Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind äquivalent:

1. A ist schiefhermitesch.
2. A ist normal und alle Eigenwerte sind rein imaginär.
3. Es existiert eine unitäre Matrix $Q \in U_n\mathbb{C}$, so dass Q^*AQ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge alle rein imaginär sind.

6 Punkte

Aufgabe 26: Sei $\mathfrak{S}_n := \mathrm{Sym}(1,\dots,n)$ die symmetrische Gruppe der Menge $\{1,\dots,n\}$ und $e_i \in \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1,\dots,n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Betrachte zu $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ die folgende lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} F_\sigma : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ e_i &\mapsto F_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad \text{für } i \in \{1,\dots,n\}. \end{aligned}$$

(i) Sei $c \in \mathfrak{S}_n$ der Zykel $c = (1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$, d.h. $c(i) \equiv i+1(\mod n)$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Berechne Eigenwerte und Basen für die Eigenräume von F_c.

(ii) Sei nun $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation. Diese lässt sich eindeutig als Produkt von disjunkten Zykeln schreiben, d.h. es existiert ein $r \in \mathbb{N}$ und Zykel $c_j \in \mathfrak{S}_n$ mit

$$\begin{aligned} \sigma &= c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_r && \text{wobei für } j \in \{1,\dots,r\} \text{ gilt} \\ c_j &= (i_{j,1}\ i_{j,2}\ \cdots i_{j,\ell_j}) && \text{mit } i_{j,k} \in \{1,\dots,n\} \end{aligned}$$

Berechne unter Benutzung von Aufgabenteil (i) das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Basen für die Eigenräume von F_σ.

6 Punkte