Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt

SS 2009
Ausgabe: 15. 4. 2009
Abgabe: 22. 4. 2009

1. Übung
zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Vervollständigen Sie den Beweis der Behauptung 2.4 indem Sie Folgendes zeigen: Sind die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ elementar (d.h. jeweils als endliche Vereinigung paarweise disjunkter achsenparalleler Rechtecke darstellbar, vgl. Definition 2.3), dann sind auch die Mengen $A \backslash B$ und $A \triangle B$ elementar.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

1. Bestimmen Sie den Limes Superior und den Limes Inferior der mittels $A_n = B$ für ungerade n und $A_n = C$ für gerade n definierten Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer nichtleeren Menge X. Zeigen Sie
   - $\liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}(x) = 1_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x)$, für alle $x \in X$,
   - $\limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}(x) = 1_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x)$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Mengenfunktion $\hat{m}$ aus Definition 2.6 wohldefiniert ist (cf. Bemerkung 2.7.1).

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Beweisen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben kann.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte