

## 10. Übung

### zur Maß- und Integrationstheorie

#### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  und nichtnegative  $\mathcal{F}$ -messbare numerische Funktionen  $f$  und  $g$ . Zeigen Sie:

- (a) Für  $p \in [1, \infty)$  gilt  $\int_{\Omega} f^p d\mu = \int_{[0, \infty)} pt^{p-1} \mu(f > t) d\lambda(t)$ .
- (b) Gilt  $\mu(f > t) \leq \mu(g > t)$  für alle  $t \geq 0$ , so folgt  $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$ .

Hinweis zu (i): Benutzen Sie den Satz von Fubini.

#### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $([0, 1], \mathfrak{B}([0, 1]))$  sowie  $\nu$  das Zählmaß hierauf. Weiter bezeichne  $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$  die Diagonale des Einheitsquadrates.

- (a) Zeigen Sie, dass  $D \in \mathfrak{B}([0, 1]) \otimes \mathfrak{B}([0, 1])$  gilt.
- (b) Berechnen Sie  $\int_{[0, 1]} \nu(D_x) d\lambda(x)$  sowie  $\int_{[0, 1]} \lambda(D^y) d\nu(y)$ , wobei  $D_x$  und  $D^y$  die Schnitte von  $D$  bezüglich der ersten Koordinate  $x$  bzw. der zweiten Koordinate  $y$  bezeichnen.
- (c) Warum ist hier der Satz von Fubini für nichtnegative Funktionen nicht anwendbar?

#### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie unter Verwendung des Satzes von Fubini das Lebesgue-Maß der Kreisscheibe

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei

$$f: [1, \infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^{-xy} - 2e^{-2xy}.$$

Untersuchen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_1^{\infty} f(x, y) \lambda(dx) \lambda(dy)$$

und

$$\int_1^{\infty} \int_0^1 f(x, y) \lambda(dy) \lambda(dx).$$

auf Gleichheit. Weshalb ist hier der Satz von Fubini nicht anwendbar?

**Gesamtpunktzahl: 16 Punkte**