Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 23. 6. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 30. 6. 2009

11. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Seien μ_1 und μ_2 σ-endliche Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$. Die Faltung $\mu_1 * \mu_2$ ist definiert als
$\mu_1 * \mu_2 := (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ \varphi^{-1}$ mit $\varphi\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$.

(a) Zeigen Sie: Falls μ_1 eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt, so gilt dies auch für $\mu_1 * \mu_2$.

(b) Zeigen Sie, dass für Borel-messbare, Lebesgue-integrierbare $f_1, f_2 \geq 0$ gilt:

$$(f_1\lambda^d) * (f_2\lambda^d) = (f_1 * f_2)\lambda^d.$$

Dabei bezeichnet $f\lambda^d$ das Maß mit Dichte f bezüglich λ^d.

(c) Zeigen Sie, dass die Faltung von Maßen kommutativ ist, d.h. dass $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ gilt.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**
Es sei $\mathcal{M}$ der Vektorraum der signierten Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$, und es sei $\|\cdot\|$ die Totalvariation auf $\mathcal{M}$. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{M}$.

(b) Jede Cauchyfolge bezüglich dieser Norm konvergiert in $\mathcal{M}$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Es seien $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ endliche signierte Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass (μ_n) genau dann in Variationsnorm gegen μ konvergiert, falls $(\mu_n(A))$ gleichmäßig in $A \in \mathcal{F}$ gegen $\mu(A)$ konvergiert.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $Q\colon \Omega \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heißt *stochastischer Kern*, falls gelten:

(i) Für jedes $x \in \Omega$ ist $A \mapsto Q(x, A)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

(ii) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ ist $x \mapsto Q(x, A)$ eine $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$-messbare Abbildung.

Für $n \geq 2$ definiere rekursiv $Q_n(x, A) := \int_\Omega Q_{n-1}(y, A) Q(x, dy)$. Zeigen Sie: Q_n $(n \geq 2)$ ist ein stochastischer Kern.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte