Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt

SS 2009
Ausgabe: 30. 6. 2009
Abgabe: 7. 7. 2009

12. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Es seien ν_1 und ν_2 zwei bezüglich μ absolutstetige Maße. Zeigen Sie, dass für die Variationsnorm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\|\nu_1 - \nu_2\| = \|\frac{d\nu_1}{d\mu} - \frac{d\nu_2}{d\mu}\|_{L^1(\mu)}.$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**
Erweitern Sie den Beweis des Lebesgue'schen Zerlegungssatzes (Theorem 9.10) auf $\sigma-$endliche Maße ν.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Es seien μ_1 und μ_2 Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$, wobei mindestens eines der beiden Maße endlich sei. Zeigen Sie, dass eine messbare Zerlegung von Ω in Ω_1 und Ω_2 existiert, so dass folgende Implikationen gelten:

$$F \in \mathcal{F}, F \subseteq \Omega_1 \Rightarrow \mu_1(F) \leq \mu_2(F),$$

$$F \in \mathcal{F}, F \subseteq \Omega_2 \Rightarrow \mu_2(F) \leq \mu_1(F).$$

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Seien μ_1, μ_2 zwei $\sigma-$endliche Maße auf einem Messraum, mit $\mu_1 \ll \mu_2$ und $f = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}$.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist $\mu_2 \ll \mu_1$, wenn $\mu_2(f = 0) = 0$ gilt.

(b) Im Fall von (a) ist $\frac{1}{f}$ eine Version der Radon-Nikodym Dichte $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte