Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 7. 7. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 14. 7. 2009

13. Übung
zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Eine Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn es eine nichtfallende Funktion $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in [a.b]$ mit $x < y$ die Ungleichung

$$F(y) - F(x) \leq G(y) - G(x)$$

gilt.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**
Sind F eine Lipschitz stetige und G eine absolutstetige Funktion, so ist $F \circ G$ absolutstetig.

Aufgabe 3 (&4) **(8 Punkte)**
Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann heißt

$$H(\nu|\mu) := \begin{cases} \int_\Omega \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu & : \quad \text{falls } \nu \ll \mu \\ \\ \infty & : \quad \text{sonst;} \end{cases}$$

die *relative Entropie* von ν bezüglich μ (oder auch *Kullback-Leibler Abstand* von ν und μ). Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H(\nu|\mu) = \int_\Omega \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$, falls $\nu \ll \mu$. Folgt in diesem Fall $H(\nu|\mu) < \infty$?

(b) $H(\cdot|\mu)$ ist nichtnegativ auf der Menge $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und μ ist die einzige Nullstelle.

(c) Für fixiertes μ ist $H(\cdot|\mu)$ konvex auf $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$; das heißt, für $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt
$$H(\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2|\mu) \leq \lambda H(\nu_1|\mu) + (1-\lambda)H(\nu_2|\mu).$$

(d) $\|\nu - \mu\|^2 \leq 2H(\nu|\mu)$, wobei $\|\cdot\|$ die Totalvariation bezeichnet; andererseits existiert kein $C \in (0,\infty)$ mit $H(\nu|\mu) \leq C\|\nu - \mu\|^2$ für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$.

(e) Berechnen Sie $H(\cdot|\mu)$ für $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

Hinweis: Jensen'sche Ungleichung; zu (d): Verwenden Sie Aufgabe 1 von Blatt 12 und die Ungleichung $|x-1| \leq \sqrt{\frac{1}{3} f(x) g(x)}$ für $x \geq 0$, mit $f(x) = 4 + 2x$ und $g(x) = x \log x - x + 1$, sowie die Hölder'sche Ungleichung.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte