Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 21. 4. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 28. 4. 2009

2. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Untersuchen Sie die Mengen

1. $A := \{(x, y) \in [0, 1]^2 |\ x \text{ oder } y \in \mathbb{Q}\}$
2. $B := \{(x, y) \in [0, 1]^2 |\ x \text{ und } y \in \mathbb{Q}\}$
3. $C := \{(x, y) \in [0, 1]^2 |\ x \text{ und } y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$
4. $D := \{(x, y) \in [0, 1]^2 |\ 42x = 17y\}$

auf Lebesgue-Messbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls deren zweidimensionales Lebesgue-Maß.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist, also dass für $A \subset \mathbb{R}^2$ und $x \in \mathbb{R}^2$ die Menge A genau dann Lebesgue-messbar ist, wenn die Menge $x + A := \{x + y : y \in A\}$ Lebesgue-messbar ist und dass in diesem Fall beide Menge dasselbe Maß haben. Sie dürfen zur Vereinfachung Ihres Beweises annehmen, dass beide Menge im Einheitsquadrat enthalten sind.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Es sei $\mathcal{U}$ die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche sich als endliche Vereinigung von Intervallen schreiben lassen. Hierauf definieren wir die Funktion $\mu : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mittels

$$\mu(U) = \begin{cases} 1, & \text{falls es ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } (0, \varepsilon) \subset U \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ endlich additiv, jedoch nicht σ-additiv ist.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subseteq E = [0, 1]^2$ genau dann Lebesgue-messbar ist, wenn

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(E \setminus A) = 1$$

gilt.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte