Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 12. 5. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 19. 5. 2009

5. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Es sei $\mathcal{E} := \{E \subset \mathbb{R}\colon E \text{ endlich }\}$ sowie $\mu : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ mit $\mu(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ ein Ring in $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie weiterhin, dass es mehrere verschiedene Fortsetzungen von μ zu Maßen auf $\sigma(\mathcal{E})$ gibt. Steht dies im Widerspruch zu Folgerung 3.33?

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

(a) Seien f und g zwei messbare reelle Funktionen auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ messbare reelle Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

(b) Es sei $f_n, n = 1, 2, \ldots$ eine Folge messbarer reeller Funktionen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbare Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

(c) Es sei $f_n, n = 1, 2, \ldots$ eine Folge messbarer reeller Funktionen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie:
$$\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existiert } \} \in \mathfrak{A}.$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ zwei Teil-$\sigma-$Algebren von $\mathcal{F}$. Es bezeichne $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ die kleinste $\sigma-$Algebra in $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$, welche alle Mengen der Gestalt $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{E}_1$ und $A_2 \in \mathcal{E}_2$ enthält. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges Maß $\mu^{(2)}$ auf $(\Omega \times \Omega, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ existiert, welches
$$\mu^{(2)}(A_1 \times A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$
für $A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2$ erfüllt. Interpretieren Sie $\mu^{(2)}$ geometrisch für beliebige $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.
Hinweis: Interpretieren Sie $\mu^{(2)}$ als Bildmaß einer geeigneten messbaren Abbildung.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

(a) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass g Borel-messbar ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $x \mapsto |f(x)|$ Borel-messbar ist. Folgt hieraus, dass f Borel-messbar ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte