Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 19. 5. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 26. 5. 2009

6. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

(a) Es seien μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und F_μ die zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie: F_μ ist genau dann in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ gilt.

(b) Welchem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ entsprcht die Verteilungsfunktion $F_\mu \colon \mathbb{R} \to [0,1], F_\mu(x) : 0 \vee (x \wedge 1)$? Berechnen Sie dazu $\mu((a,b))$ für beliebige $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})-$messbare Funktion. Man definiert das *essentielle Supremum* von f als

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(\{f \geq c\}) = 0\}.$$

Wie üblich ist per Definition $\inf \emptyset := \infty$. Zeigen Sie:

(a) Es seien f eine stetige und g eine messbare Funktion von $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Gilt $f = g\ \lambda-$f.ü., so folgt

$$\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g = \sup f.$$

(b) Für jede messbare reellwertige Funktion f gilt $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$.

(c) Es seien f und g messbare Funktionen von $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}$ mit $g \geq 0\ \mu-$f.ü. Dann folgt

$$fg \leq (\operatorname{ess\,sup} f)g \quad \mu - \text{f.ü.}$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \colon [1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{x}\sin(x)$$

auf $[1, \infty)$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, jedoch nicht Lebesgue-integrierbar.

Bitte wenden

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für nichtnegative numerische Funktionen f, g auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt (vgl. Seite 71 im Skript):

(a) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \int (\alpha f) = \alpha \int f \, d\mu$;

(b) $\int (f+g) d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$;

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte