Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 2. 6. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 9. 6. 2009

8. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Beweisen Sie die verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung: Für $1 < p_1, p_2, \ldots, p_n < \infty$ mit $\sum_{k=1}^n 1/p_k = 1$ und messbare Funktionen $f_1, \ldots, f_n \colon (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ gilt

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass für ein endliches Maß μ und $1 < p < q < \infty$ die Beziehung $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt.

(b) Ist die Inklusion aus (a) auch für nicht endliche Maße erfüllt? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(c) Beweisen Sie, dass für ein endliches Maß μ und $1 < p < q < \infty$ die Einbettung

$$J \colon (\mathcal{L}^q(\mu), \|\cdot\|_q) \to (\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p) \colon f \mapsto f$$

stetig ist.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Zeigen Sie, dass $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(\gamma) = \log \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} d\mu(x)$, eine konvexe Funktion ist, falls das Integral für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ endlich ist. Zeigen Sie weiterhin, dass für $\alpha > \int x d\mu(x)$ gilt: $\mu([\alpha, \infty)) \leq \exp\{-\sup_{\gamma > 0}(\alpha\gamma - \varphi(x))\}$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass der gleichmäßige Grenzwert p-fach μ-integrierbarer Funktionen ebenfalls p-fach μ-integrierbar ist.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte