Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt

SS 2009
Ausgabe: 9. 6. 2009
Abgabe: 16. 6. 2009

9. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Es sei $p \geq 1$. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass aus der Konvergenz dem Maße nach im Allgemeinen nicht die Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ folgt.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Es seien $f, f_1, f_2 \ldots$ und $g, g_1, g_2 \ldots$ messbare reelle Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, so dass $f_n \longrightarrow f$ dem Maße nach und $g_n \longrightarrow g$ dem Maße nach. Zeigen Sie:

(a) Dann gilt auch $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ dem Maße nach.

(b) Ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so folgt $\varphi \circ f_n \longrightarrow \varphi \circ f$ dem Maße nach.

Hinweis zu (b): Behandeln Sie zuerst den Fall, dass φ kompakten Träger hat und somit gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $p, q \in (1, \infty)$ seien derart gewählt, dass $1/p + 1/q = 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ folgt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(b) Man sagt, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *schwach* gegen $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ konvergiert, falls für alle $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \, d\mu = \int_\Omega f g \, d\mu$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bezüglich $|| \cdot ||_p$ die schwache Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f impliziert.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Es sei μ das Zählmaß auf $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. Zeigen Sie, dass eine Folge reellwertiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann dem Maße nach gegen eine $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathfrak{B})$-messbare Funktion f konvergiert, falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte