**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** SS 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: falls Punkte benötigt, 15.07. vor der Übung

# 12. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Vorbereitungsblatt)

---

## Hausaufgaben

### 1. Aufgabe (5 Punkte)

Eine reelle Zahl $m$ heiße *Median* der Verteilungsfunktion $F$, falls $\lim_{y\uparrow m} F(y) \leq \frac{1}{2} \leq F(m)$ gilt. Zeige, dass jede Verteilungsfunktion $F$ mindestens einen Median hat und dass die Menge der Mediane von $F$ eine abgeschlossene Menge ist.

### 2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $X^{(p)} := (X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor unabhängiger Zufallsgrößen, welche alle Bernoulliverteilt mit Parameter $p \in (0,1)$ sind. Weiterhin sei $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ *wachsend*, d.h. aus $x_i \leq y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt $f((x_1, \ldots, x_n)) \leq f((y_1, \ldots, y_n))$.

(a) Zeige, dass $E(f(X^{(p_1)})) \leq E(f(X^{(p_2)}))$ gilt, falls $p_1 \leq p_2$.

(b) Es seien $f$ und $g$ wachsende Funktionen von $\{0,1\}^n$ nach $\mathbb{R}$. Zeige per Induktion in $n$, dass $Cov(f(X), g(X)) \geq 0$ gilt.

### 3. Aufgabe (5 Punkte)

Gib ein Beispiel (d.h. Zustandsraum, Anfangsverteilung und Übergangsmatrix) für eine Markovkette, welche stationär, jedoch nicht reversibel ist.

## 4. Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass der Grenzwert einer in Wahrscheinlichkeit konvergenten Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen f.s. eindeutig ist. Das heißt: Sind $Y$ und $Z$ Zufallvariablen derart, dass $X_n \xrightarrow{P} Y$ und $X_n \xrightarrow{P} Z$ gilt, so folgt $P(Y = Z) = 1$.

## 5. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $P$ die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette mit endlichem Zustandsraum $I$ und $B \subset I$ eine nichtleere Teilmenge. Weiter sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche harmonisch in allen $x \notin B$ ist.

Zeige, dass, falls $h$ nicht konstant ist und $h(j) = \max_{i \in I} h(i)$ gilt, schon $j \in B$ gelten muss.

Bemerkung: Diese Eigenschaft wird auch "Maximumprinzip" genannt.

## 6. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(X_n)$ eine Folge nichtnegativer Zufallsgrößen derart, dass für jedes $K > 0$ schon

$$P(X_n \leq K) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt. Zeige, dass $EX_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt.

## 7. Aufgabe (5 Punkte)

Familie Müller hat drei Kinder: Alex, Bastian und Charlotte. Jeden Abend muss eines der Kinder abwaschen. Alex wäscht in 3/10 der Fälle ab, Bastian in 4/10 der Fälle und ansonsten Charlotte. Die Wahrscheinlichkeit, dass während des Abwasches Geschirr zerbricht beträgt bei Alex 5%, bei Bastian 10% und bei Charlotte 20%.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem beliebigen Abend Geschirr zerbrochen wird?

(b) Am letzten Abend wurde das Geschirr zerbrochen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Charlotte abgewaschen?

**Die Klausureinsicht findet am Do. den 23.07.2009 von 9:15h bis 11:45 in MA 744 statt.**

Gesamtpunktzahl: 35